J. M. L.
1845.

65

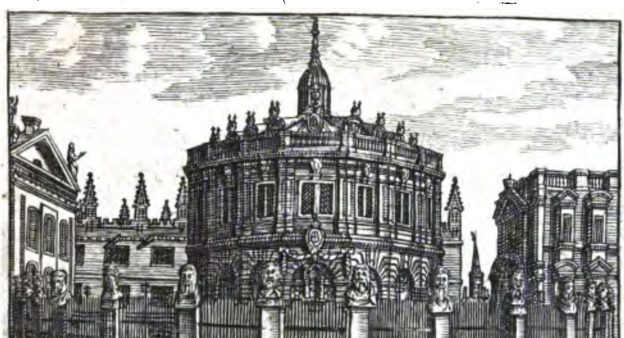
SECTIONUM CONICARUM

ELEMENTA

NOVA METHODO DEMONSTRATA.

Authore JACOBO MILNES, A. M. Rectore de INGESTRE in Agro STAFFORDIENSI.

EDITIO TERTIA
Novâ & SEXTA *Parte auctior.*



OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXXIII.
Impensis *Ant. Peisley* Bibliop. *Oxon.*
Prostat apud *J. Knapton, W. Taylor,* & *W. Meadows,*
Bibliopolas *Londinenses.*

Imprimatur.

ROB. SHIPPEN,

VICE-CAN. *OXON.*

Sept. 9. 1723.

CELEBERRIMÆ

ACADEMIÆ

OXONIENSI

IN USUM

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

OPUSCULUM HOC

Humillime D.

JACOBUS MILNES.

PRÆFATIO.

EN tibi, Lector candide, Tertiam horum Elementorum Editionem; in quâ licèt (sicut in secundâ) præscriptos mihi primitùs (quod ad operis molem attinet) limites transcenderim, à principali tamen, quem mihi ab initio proposui, scopo libens non aberravi, Ut (*nempè*) præcipuas Sectionum Conicarum proprietates quam possem breviter & dilucide demonstratas darem.

Hoc propositum an aliquâ omnino, aut quâ ex parte, quo etiam modo & ratione, consecutus fuerim, cum tu melius ex ipsa lectione, quam nostro quovis præloquio, possis discere, vix alia causa fuit cur te hic in limine detinerem, quàm quod nefas ducerem hæc in publicum emittere, nisi simul per quos in iisdem concinnandis profecerim ingenuè profiterer, gratusque agnoscerem.

Scias itaque hujus opusculi materiem ex Cl.V. Ph. de la Hire *opere maximo magna ex parte desumptam esse; & licet quoad operis compagem, præsertim in primis Sectionum affectionibus eliciendis, pro diversi instituti ratione, diversæ longè methodo institerim, in cæteris tamen me (quantum licuit) vestigia ejus libenter pressisse, & demonstrationes plerumque integras adhibuisse.*

Quæ continentur in propp. 35. & 36. p. 1. *& earum corollariis, & prop.* 4 *.p.* 5. *mihi suppeditavit Incomparabilis viri* D. If.Newton Principiorum Liber 1. *immutatâ paululùm tam enuntiationis quam demonstrationis formâ, & proposito nostro accommodatâ.*

Sectionis Conicæ proprietatem illam quam in prop. 6. *p.* 4. *reperies, absque demonstratione mihi impertiit V. Cl*

Cl. Dav. Gregorius *M. D. & in Cathedra* Saviliana *Astronomiæ professor, cum primam hujusce tractatus editionem molirer ei inserendam.*

Propositionis 11. *p.* 2. *demonstrationem, elegantiorem multò quàm alibi mihi reperire contigit, mecum olim communicavit V. Cl.* Jo. Keill *postea M. D. &* Gregorii *in eadem cathedra tandem successor. Qui etiam communicavit ea quæ in corollario* 2. *prop.* 4. *& prop.* 5. *p.* 6. *sed nostro modo demonstrata, exhibentur, quæque V. Cl. Transactionibus Philosophicis postea inseruit.*

Præter hæc jam particulatim enumerata, cætera omnia (sive ipsæ sectionum proprietates, sive demonstrationes speciales) quæ apud Cl. de la Hire *non extant, ex proprio penu sunt, quæque mihi argumentum hoc pressiùs tractanti sese obvia tulere; Ea autem, vel ob nativam dignitatem, vel usum quem præ se ferre visa sunt, non te celanda existimavi, an alibi extarent prorsus ignarus.*

Multa autem passim in hoc opere me inter corollaria conjecisse invenies, quæ ipsis theorematibus nec usu, nec dignitate cedunt; quod ut mihi compendia sectanti quoties (ob consequentiæ facilitatem) cum fructu fieri id posset, licuisse ratus sim, ita, ne propterea de eorum aliquibus tibi justo minor sederet opinio, te ejus hîc monendum esse oportuit.

Quæ dixi hactenus totum opus in genere respiciunt. Quod vero ad Sextam partem, quam hæc Editio primùm exhibet, speciatim attinet, constat ea ex proprietatibus (quantum ego equidem scio) omnino novis, paucis admodum exceptis, quas prius notas, succinctiore quam hactenus modo demonstratas dedi. His, cùm usum non contemnendum præstare posse viderentur, nolui lector ut careres; & licet varii generis essent, malui ut quam hîc sortitæ sunt partem seorsim conficerent, quàm singulas quasque locis propriis inserendo receptum propositionum & figurarum ordinem turbare.

Atque hîc, lector, te vix salutatum valere jubeo, hosque nostros conatus candori tuo commendo. Si in ipsam veri-

veritatem nusquam peccaverim, levioribus admissis (spero) facilè ignosces. Quod Elementa hæc manca & imperfecta sint, si vitio vertas, id cum aliis omnibus compendiosè scriptis commune habent. Quos denique labores (tui gratiâ) in iis elucubrandis devorare coactus sim, ut ipse inexpertus non facile intelliges, ita nolim ex parva libelli mole dijudices; horum certè (quot quantìve fuerint) dum tibi prosim, me nunquam pigebit; imo semper juvabit meminisse.

Tabulæ

Tabulæ ſic locandæ.

Tab.	Pag.	T.	P.	T.	P.	T.	P.
1	8	6	26	11	58	16	86
2	10	7	38	12	64	17	88
3	16	8	42	13	66	18	96
4	18	9	48	14	72	19	106
5	22	10	54	15	82	20	116
						21	127

Quæ addenda & corrigenda ſunt inveniet lector poſt finem libri.

PARS

PARS I.

SECTIO I.

Definitiones.

I. SI recta linea A E per punctum quodvis A extra circuli B D E C planum positum utrinque infinite extensa, manente puncto A, per totam circuli peripheriam circumagatur; Binæ hujusmodi motu genitæ superficies sigillatim *Conicæ superficies* appellantur. *Fig.* 1, 2.

II. Conjunctim vero *Superficies ad verticem oppositæ*; vel simpliciter *Superficies oppositæ*.

III. Punctum A *Vertex* dicitur.

IV. Circulus B D E C *Basis*.

V. Recta A C per verticem A & basis centrum C utrinque infinite producta *Axis*.

VI. Solidum superficie conicâ & basi contentum *Conus* dicitur.

VII. Et quidem, si axis ad basim rectus fuerit, *Conus Rectus*. 1.

VIII. Si inclinatus, *Conus Scalenus*. 2.

IX. Communis plani alicujus cum superficie conicâ intersectio, *Sectio Conica* dicitur.

Corollarium def. 1. Recta per punctum quodvis in utrâvis superficie & verticem ducta, tota est in eâdem superficie; Productaque ultra verticem est in superficie oppositâ.

Propositio I. Theorema I.

Recta linea A E per verticem A ducta ad quodvis punctum E intra utramvis superficierum oppositarum, 3.

quantumvis utrinque producta, intra superficies conicas continetur. Rectaque per verticem A ducta ad quodlibet punctum G extra utramque superficiem, quantumvis producta, extra utramque superficiem manet.

Hæc propositio clarior est quam ut demonstratione egeat.

Prop. II. Theor. II.

4. *Si per Coni verticem A transeat planum ABC, secans utcunque Conicas superficies; Easdem in duabus rectis AB, AC secabit.*

Sit intersectio plani secantis & plani basis recta BC, & à punctis B, C, in quibus hæc occurrit basis peripheriæ, ad verticem A ductæ intelligantur rectæ BA, CA; Erunt hæ tum in plano secante, tum (per *Coroll.* præced.) in superficiebus Conicis, hoc est, sunt plani & superficierum intersectiones. Porro ab A ad punctum quodvis F in basis peripheria, à B & C diverso, ducatur recta AF; Erit hæc ubique extra planum ABC; hoc est, planum ABC superficiebus Conicis solummodo in rectis AB, BC occurrit.

Prop. III. Theor. III.

5. *Recta linea ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in eadem conica superficie sumpta, modò non sint in eadem recta per verticem, tota cadit intra superficiem conicam, producta vero utrinque extra eandem; & neutri superficierum oppositarum amplius*

6. *occurrit. Contra, Recta ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in oppositis superficiebus, modò non in eadem recta per verticem, cadit extra utramque superficiem, productaque utrinque intra utramque transit, neutrique earum amplius occurrit.*

Nam ductis rectis AE, AD, & productis (si opus) in C, B, Planum per AEC, ADB, in quo DE sita est;

est, non occurrit superficiei vel superficiebus oppositis nisi in rectis AEC, ADB; unde recta DE non occurrit ipsis nisi in punctis D, E. In priore vero casu 5
planum anguli DAE, proindeque recta DE, est intra superficiem conicam; productaque utrinque extra eandem cadet. In posteriore planum anguli DAE est ex- 6
tra utramque superficierum oppositarum, proindeque & recta DE; producta vero utrinque intra utramque transibit.

Si puncta D, E sint in eadem recta per verticem, erit recta ipsas conjungens (per *Coroll.* præced.) in ipsis superficiebus conicis.

Prop. IV. Theor. IV.

Si circulum qui basis est Coni contingat recta DE in D, & Coni autem vertice A ad contactum D agatur recta 7.
AD; Planum ADE per utramque rectam productum superficiei conicæ solummodo in recta AD occurrit. Hujusmodi vero occursus Contactus *dicitur.*

Recta AD tum superficiei conicæ, tum plano ADE communis est; Cùm vero, præter D, quodvis punctum F in baseos peripheria sit extra rectam DE, Erit etiam, præter DA, quævis alia recta FA in superficie Conica extra planum ADE; unde liquet propositum.

Coroll. 1. Hinc & ex def. 1. liquet planum ADE productum superficiem oppositam in DA producta contingere.

Coroll. 2. Hinc etiam patet methodus Ducendi planum quod superficiem Conicam in data recta AD contingat. Ductâ nempe in plano baseos rectâ DE peripheriam ejus in D contingente, Actóque per AD, DE plano ADE, proposito satisfiet.

Coroll. 3. Præter ADE, aliud planum secundum AD superficiem conicam non contingit. Nam intersectio ejus cum basi hujus peripheriam secabit; unde & planum ipsum superficiem conicam secabit, hoc est, non continget.

Prop. V. Problema I.

8. *Per rectam AC, per coni verticem A extra superficiem ejus utcunque ductam, Planum ducere quod superficiem conicam contingat.*

Per AC agatur utcunque planum, secans basim in GH, Cui recta AC (cum in eodem sit plano) occurret, vel erit parallela.

1°. Occurrat in E; A puncto E baseos peripheriam contingat ex utravis parte recta ED; Connexâ AD, Erit ADE planum quæsitum.

Transit enim per AC, & (per præced.) superficiem conicam contingit.

9. 2°. Sit AC parallela GH; Bisectâ GH in M, erectâque, ex utravis parte, ad GH perpendiculari MD, factâque DE parallelâ GH, & connexâ AD; Erit iterum ADE planum quæsitum.

Nam (ob AC || GH || DE) erit AC in plano ADE; Continget vero DE baseos peripheriam in D; unde (per præced.) planum ADE Conicam superficiem continget.

Coroll. Liquet bina tantum plana per AC superficiem conicam contingere; Ex utraque scilicet parte plani AGH unum.

Prop. VI. Theor. V.

10. *Recta quævis ED, rectæ cuivis AB per verticem A in ipsa superficie conica ductæ, parallela, (modò non sit in plano superficies in AB contingente) Uni tantùm superficierum oppositarum, idque in unico puncto E, occurrit; Hoc est, ex una parte, tota est extra utramque superficiem; Ex altera, tota intra illam continetur in qua punctum E situm est.*

Planum per parallelas AB, ED, secet superficies in cAC; Hoc planum BAC, in quo recta ED sita est, non occurrit superficiebus, nisi in AB, cAC; Rectaque

que E D (ob parallelismum) non occurrit rectæ A B; 1
Occurrit tamen necessariò rectæ c A C alicubi in E, manetque ex una parte puncti E intra angulum B A C, ex altera intra angulum qui est huic deinceps; Unde &c.

Coroll. Liquet planum per D E, plano secundum A B superficiem conicam tangenti, parallelum, superficiei oppositæ non occurrere.

Prop. VII. Theor. VI.

Omnis recta E F, rectæ cuivis A D per verticem A ductæ, atque intra superficies conicas cadenti, parallela, utrique superficiei oppositæ occurrit alicubi in 11.
E, F. Omnisque recta E F, per punctum quodvis 12.
E in utravis superficie ducta, rectæ cuivis per verticem A D extra superficies cadenti, parallela, Eidem superficiei occurrit denuò in F; Excepto duntaxat casu ubi punctum E fuerit in una rectarum secundum quas plana per A D superficies contingunt.

Per A D & rectam E F transeat planum, secans conicas superficies in B A b, c A C, quod semper fieri posse, nisi in casu memorato, plus satis manifestum est; Cum A D cadat intra angulum B A C, vel B A c, Recta E F quæ est ipsi A D parallela, & in eodem cum ipsa plano, occurret necessariò utrique A B, A C alicubi in E, F; Eritque in priori quidem casu occursuum alter F in A B producta, hoc est, erunt E, F, in superficiebus oppositis.

Sin punctum E, in posteriori casu, sit in recta secundum quam planum per A D superficies conicas con- 13.
tingit, manifestum est planum per A D & punctum E conicas superficies non secare, & rectam E F || A D esse in plano superficies conicas secundum rectam A E C contingente.

Coroll. 1. Hinc & per prop. 3. ulterius liquet Rectam 11.
E F, nisi in punctis E, F, neutri superficierum opposi- 12.
tarum amplius occurrere.

Coroll. 2. Omne planum per hujusmodi rectam E F, 11.
in

12. in priori casu, secabit utramque superficiem; Et in posteriori, si per A D transeat planum quodvis, extra utramque superficiem cadens, planum per E F huic parallelum, superficiem conicam, in qua punctum E sumptum est, secabit ex omni parte; superficiei tamen oppositæ non occurret.

Prop. VIII. Theor. VII.

14. *Si alterutra superficierum oppositarum plano secetur plano baseos parallelo, Erit facta sectio E G F L Circuli circumferentia.*

Secetur Conus utcunque per axem duobus planis, facientibus triangula A B D, A I K, quæ (si opus producta) occurrant plano Sectionis in G H L, E H F; Ob plana parallela, erunt triangula A H F, A C K, uti etiam A H L, A C D similia: Quare

$$AH:AC::HL:CD$$

$$\&\ AH:AC::HF:CK;\ \text{unde}$$

$$HL:HF::CD:CK.$$

Est vero C baseos centrum, Unde $CD = CK$, ergo & $HL = HF$. Pari modo ostendetur $GH = HF$; & similiter in quavis alia intersectione plani E G F L cum plano per axem. Est ergo sectio E G F L circuli circumferentia, cujus centrum H.

Prop. IX. Theor. VIII.

15. *Si Conus scalenus A B C L secetur plano per axem, & ad basim recto, faciente triangulum A B L; Resectoque utcunque ab angulo B A L triangulo A D I, triangulo A L B simili, sed subcontrarie posito, (i. e. ut sit Ang. $ALB = ADI$) secetur iterum Conus plano per D I, ad trianguli A B L planum recto, Erit facta in superficie conica sectio D K I F circuli circumferentia. Dicitur autem D K I F* Sectio Subcontraria.

Per ipsius D I punctum quodvis G agatur recta E G H, ipsi B L parallela, Per quam transeat planum

ad

ad planum trianguli rectum, proindeque basi parallelum, faciens (per praeced.) in superficie conica circuli circumferentiam F E K H, planumque per D I secans in recta F G K; Erit (propter planum per axem) recta E H circuli F E K H diameter; Et (propter utriusque sectionis planum ad planum trianguli rectum) erit eorum intersectio K G F ad utramque D G, E G perpendicularis; Est itaque (propter circulum) $EG \times GH = GFq = GKq$; Sunt vero (propter Ang. $AID = AEH$, & $DGE = HGI$) triangula D G E, H G I similia; Unde $DG : GH :: EG : GI$; Ergo $DG \times GI = EG \times GH =$ (prius) $GFq = GKq$; Sunt ergo puncta F, K ad circuli peripheriam, cujus diameter D I. Idemque erit de quovis alio puncto in recta D I. Est igitur D K I F Circuli circumferentia.

Prop. X. Theor. IX.

Si in superficie conicâ, a plano quovis basi non parallelo, fiat sectio D F I K, quae sit circuli circumferentia, Erit eadem sectio subcontraria. 15.

Planum basi parallelum faciat circulum E K H F, secans planum circuli D F I K in K G F; sitque circuli E K H F diameter E G H ad K G F perpendicularis; Transibit haec per axem, eritque $KG = GF$. Per rectam E G H, & coni axem transeat planum, secans planum circuli D F I K, in D G I, & basim in $BL \parallel EH$; Erit (ob circulos) $EG \times GH = GKq = GFq = DG \times GI$; Ergo $EG : DG :: GI : GH$; Unde Triangula D G E, H G I similia. & ang. $DEG = HIG$. Si jam manente plano per axem A B L prius ducto, intelligantur quotcunque circuli E K H F à planis basi parallelis facti; Erunt horum planorum cum plano per axem intersectiones E G H, circulorum E K H F diametri; & (ob planorum parallelismum, & rectam E G H, ad F G K prius perpendicularem) ad respectivas eorum intersectiones F G K cum plano circuli D F I K perpendiculares, easque ideo bisecabunt; Hoc est, recta

DI

DI (quæ est in eodem plano per axem) eas omnes bisecabit, & propterea est diameter, & ad easdem perpendicularis. Recta itaque FGK ad utramque DI, HE perpendicularis est; proindeque planum per axem tam ad planum circuli EFHK, (hoc est ad basim,) quam ad planum circuli DFIK rectum est. Unde liquet propositum.

Coroll. Hinc nisi Sectio conica vel sit sectio subcontraria, vel fiat à plano basi parallelo, non erit circuli circumferentia.

Lemma 1.

16. *Si duorum planorum ABE, BCF, cum plano aliquo tertio, intersectiones AD, CF sint parallelæ; Erit etiam mutua ipsorum intersectio BE ipsis AD, CF parallela.*

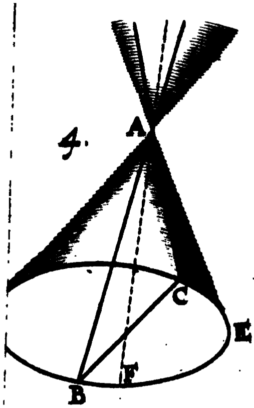
Secentur utcunque hæc tria plana à duobus planis inter se parallelis, quorum intersectiones constituant triangula ACB, DEF; Erunt (ob plana parallela) trianguli ABC latera AC, AB, BC, trianguli DEF lateribus DF, DE, EF, respective parallela; Unde anguli parallelis lateribus contenti erunt æquales: Sed (ob parallelas rectas) AC = DF; adeoque ipsa triangula æqualia, & similia. Ergo CB = FE, ac propterea BE || CF || AD.

Definitiones.

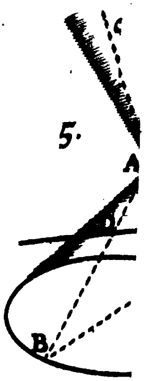
17. 1. Si Conus ABC plano ADE utcunque per verticem sectus, rursus plano secetur plano ADE parallelo; Erit facta in illius superficie sectio FGH HYPERBOLA; cujus planum productum, superficiei oppositæ occurrens, faciet ejusdem nominis sectionem fgh; Hæ vero binæ conjunctim *Sectiones oppositæ* vocantur.

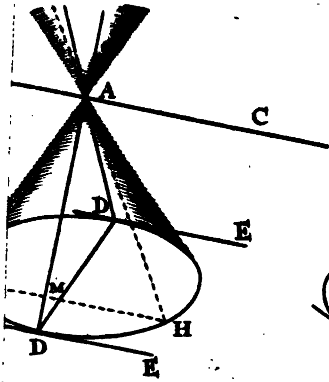
18. 2. Si per Coni verticem A, extraque illius superficiem, (hoc est illam nec secans nec tangens) transeat utcunque planum DAE; Seceturque iterum conus plano

4.

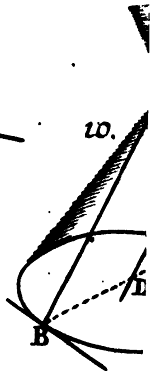


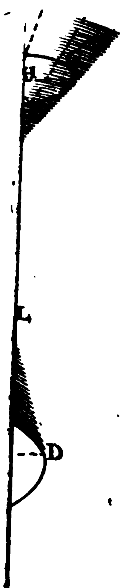
5.



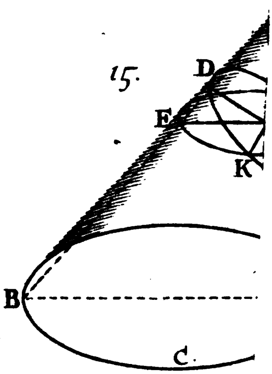


10.





15.



plano, plano D A E parallelo, Facta in illius superficie sectio F H G ELLIPSIS dicitur.

3. Quod si planum A D E coni superficiem contingat, secerurque conus plano, plano A D E parallelo, Facta in illius superficie sectio F H G dicitur PARABOLA. 19.

Coroll. 1. Hyperbola, & Parabola (cum conum in circuitu non secent) spatium non claudunt, & continuato Cono, simul in infinitum continuantur. Ellipsis vero Conum ambit, & in se revoluta spatium undique claudit.

Coroll. 2. Liquet Circuli circumferentiam Ellipsibus esse annumerandam. Nam si planum D A E per verticem sit plano basis, vel sectionis subcontrariæ parallelum, Planum huic parallelum faciet in superficie conica Circuli circumferentiam. Ideoque sub nomine vel sectionis conicæ in genere, vel Ellipseos in specie, etiam Circuli circumferentiam comprehensam intelligat lector. Quod semel monitum sufficiat.

Coroll. 3. Recta conjungens bina quæcunque puncta in sectione Conicâ, tota cadit intra sectionem, productaque utrinque extra eandem cadit, neque ei aut sectioni oppositæ amplius occurrit. Patet per prop. 3.

Coroll. 4. Conjungens bina puncta, in oppositis sectionibus sumpta, cadit extra sectiones; productaque utrinque intra utramque deinceps continetur, Neutrique earum amplius occurrit. Patet per prop. 3.

Coroll. 5. Unde Recta linea sectioni conicæ, vel sect. opp. in pluribus quam duobus punctis non occurrit.

Prop. XI. Theor. X.

Communis intersectio I L *plani alicujus* A M N, *superficiem conicam tangentis, cum plano sectionis conicæ* F I G, *in unico puncto* I *sectioni occurrit, totaque extra sectionem cadit. Hujusmodi autem occursus* Contactus *dicitur.* 20.

Nam planum A M N nisi in rectâ A I M superficiei

Conicæ non occurrit; Unde recta I L, quæ est in plano A M N, nisi in puncto I, ubi rectam A I M interſecat, sectioni non occurrit; Planum vero A I M cadit extra ſuperficiem conicam, proindeque & recta I L extra sectionem.

20. *Coroll.* 1. Præter I L alia recta in puncto I sectionem non contingit. Nam erit hujuſmodi recta neceſſario in alio plano per A M, ab A M N diverſo; quod (per *Coroll* 3. prop. 4.) Conum non contingit, i. e. ſecat, proindeque hæc recta sectionem ſecabit.

21. 22. *Coroll.* 2. Duæ quælibet I L, M N Hyperbolam vel parabolam contingentes, neceſſario concurrunt. Nam (iiſdem manentibus quæ in definitionibus) ſi dicantur parallelæ, erit planorum A I L, A M N contingentes formantium interſectio A B (per *Lemma* 1.) ipſis I L, M N parallela, ideoque in ipſo plano A D E, quod sectionis plano eſt parallelum. Sed in hyperbola (per *Coroll.* prop. 5.) aliud adhuc planum per A B (nempe ex altera parte plani A D E) poteſt conum contingere; Et in Parabola ipſum A D E conum contingit; Tria igitur plana per unam eandemque rectam A B Conum contingunt, quod (per *Coroll.* prop. 5.) fieri nequit.

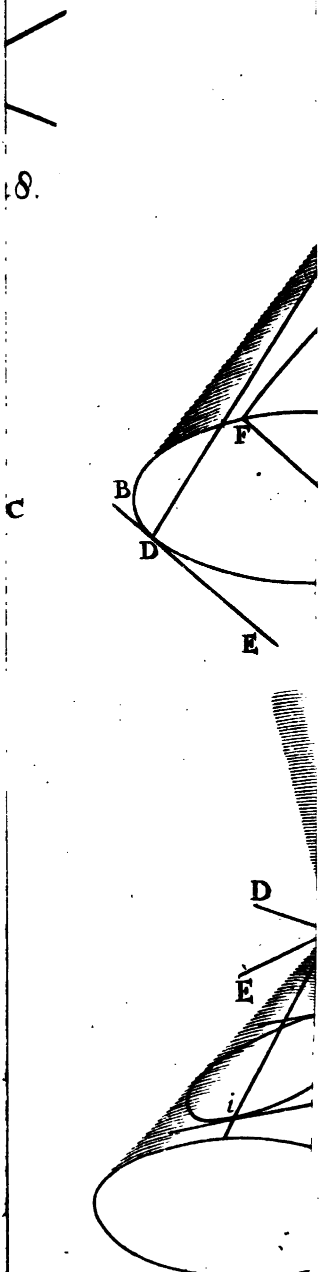
23. *Coroll.* 3. In Ellipſi vero, & oppoſitis sectionibus,
24. Contingenti cuivis I L, erit alia aliqua contingens *i l* parallela. Sit A B recta ſecundum quam planum A I L ſecat planum D A E; ſi per A B agatur aliud planum (per prop. 5.) tangens conicas ſuperficies, formabit hoc contingentem *i l*; Eſtque (ob plana parallela) A B || I L, unde (per *Lem.* 1.) I L || *i l.*

Coroll. 4. Contingens Hyperbolam I L quantumvis producta sectioni oppoſitæ non occurrit. Nam planum A I L in quo recta I L ſita eſt, non occurrit ſuperficiebus niſi in A I; nec recta I L rectæ A I niſi in I.

Coroll. 5. Rectæ parallelæ duabus plures, Ellipſin vel Sectiones opp. non contingunt. Secus plana per eandem rectam per verticem, duobus plura, conum contingerent.

Prop.

8.



21.

Prop. XII. Theor. XI.

Iisdem positis quæ in definitionibus præcedentibus; In utrâvis sectionum oppositarum, recta quævis I K *facta à plano per utramvis* A D, *vel* A E, *& punctum quodvis* I *in sectione, ducto, planumque sectionis in* I K *secante, in unico hoc puncto* I *sectioni occurrit; & ex unâ parte tota intra sectionem continetur; ex alterâ vero manet tota extra utramque sectionum oppositarum. Similiter, in Parabolâ, recta* I K *facta à plano per* A E *& punctum quodvis* I *in sectione ducto, sectioni in unico hoc puncto* I *occurrit; maneque ex unâ parte intra, ex altera extra sectionem.* 25. 26.

2. *At præter istiusmodi rectas* I K, *Quævis alia* I L *per punctum quodvis* I *sectionis, in plano sectionis, ducta, Sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis* I, L *occurrit, vel saltem sectionem contingit.* 25. 26.

Ob plana parallela erit I K || A D vel A E; unde patet pars 1 per prop. 6.

2. Cum (ob plana parallela) rectæ omnes I K sint rectæ A E, vel A D, & sibi invicem parallelæ; recta I L non erit ipsi A D, vel A E parallela; Proindeque planum per I L & coni verticem non secabit planum A D E in A D vel A E, sed aliàs in A B, quæ in hyperbolâ quidem potest cadere vel intra Ang. D A B, id est intra superficies Conicas; quo in casu (per prop. 7.) recta I L huic parallela, occurret superficiei oppositæ, hoc est, occurret Sectioni oppositæ: Vel extra; quo in casu (per eandem prop.) occurret denuo eidem sectioni, vel erit in plano superficiem contingente, i. e. Sectionem continget.

In Parabolâ erit A B semper extra superficies conicas; Unde I L (per prop. 7.) vel sectioni denuo occurret, vel eandem continget.

In Ellipsi, manifestum est (ex prop. 7.) I L per punctum quodvis in sectione I ductam eidem denuo oc- 27.

currere, vel saltem sectionem in eodem puncto I contingere.

28. *Coroll.* Hinc si per punctum quodvis B in sectione
29. conicâ vel utrâvis sectionum oppositarum, ducatur recta
30. BC, quæ sit rectæ cuivis IL quæ sectioni vel sectio-
31. nibus oppositis in duobus punctis occurrit, vel quæ sectionem, vel alterutram sectionum oppositarum contingit, parallela; Eadem vel sectioni denuo, vel sectioni oppositæ occurret in C, vel saltem sectionem continget. Nam eo ipso, quod parallela sit rectæ IL, liquet non esse ex rectarum IK numero; eademque erit ipsius, atque IL ratio.

Supple unum casum sectionum oppositarum.

Prop. XIII. Theor. XII.

32. *Positis iis quæ in Hyperbolæ & oppositarum sectionum definitione; Si duo plana* ADI, AEK *superficies conicas secundum rectas* DAd, EAe *tangentia, planum sectionum productum secent in rectis* IMi, KMk; *Dico rectas* IMI, KMk *quantumvis productas neutri sectionum oppositarum occurrere.*

Nam superficies conicæ, (in quibus sectiones sitæ sunt) & plana tangentia (in quibus sunt rectæ IMi KMk) sibi mutuo non occurrunt nisi in rectis DAd, EAe, quæ (ob plana parallela) sunt extra planum sectionum; Igitur rectæ IMi, KMk sectionibus non occurrunt.

Def. Petito ex re nomine, hujusmodi rectæ vocantur *Asymptoti.*

32. *Coroll.* 1. Omnis recta AB in plano sectionum op-
33. positarum utrivis asymptoto parallela, uni sectionum oppositarum idque in unico puncto B occurrit, manetque ex una parte intra, ex altera extra sectionem. Nam in cono hujusmodi recta utrivis IM, vel KM parallela, erit (ob plana parallela) etiam rectæ DA vel EA parallela; Unde liquet per prop. 6.

32. *Coroll.* 2. Omnis recta MC per asymptotôn occursum

sum M intra angulum IMK ducta, Atque omnis recta DE, quæ ad plagas sectionum oppositarum secat utramque asymptoton, producta utrique sectionum oppositarum occurret. Nam in cono erunt necessario parallelæ rectis aliquibus in plano DAE, intra Ang. DAE cadentibus, unde patet per prop. 7. 33.

Coroll. 3. Recta OHN hyperbolam utcunque in H contingens producta utrique asymptoto occurret in O, N extra earum occursum M, & ad easdem partes cum sectione. Nam si dicatur transire per M, vel eas ad plagas oppositas secare, vel earum alteri parallelam esse, per jam ostensa secabit sectionem; Restatque solummodo casus propositus. 34.

Coroll. 4. Unde quæ binæ OHN, ABC eandem hyperbolam contingunt, concurrunt necessario in D, intra angulum OMN asymptotis contentum. Quæ vero OHN, abc oppositas sectiones contingunt, productæ concurrunt intra Angulum aMN, vel cMO qui est angulo OMN deinceps; Vel saltem sunt inter se parallelæ. 35.

Coroll. 5. Recta BC conjungens bina puncta in hyperbola B, C, utrique asymptoto occurrit ad easdem partes cum sectione; Nam si earum uni parallela sit, occurret sectioni in unico puncto (per *Coroll.* 1.) contra hypothesin. Sin utrique occurrat, sed ad partes oppositas, sectioni oppositæ occurret (per *Coroll.* 2.) unde sectionibus oppositis in tribus punctis occurret quod (per *Coroll.* 5. ad *def.* præced.) fieri nequit. 36.

Coroll. 6. Hyperbola & asymptoti quantumvis productæ non concurrunt, propius tamen ad se invicem accedunt quam pro dato quovis intervallo. Dato, ab utravis asymptoto MA, intervallo AB, ductâque BD eidem asymptoto parallelâ, secabit hæc (per *Coroll.* 1.) Sectionem alicubi in C; Unde liquet propositum. 37.

Coroll. 7. Ex jam ostensis hoc quoque manifestum est, Pro vario situ puncti H (in *Coroll.* 3.) respectu puncti M, punctorum N, O alterum ad punctum M accedere recedente altero, prout ad has vel illas partes pun- 34.

ctum

ctum H abierit; At vero eorum neutrum prius puncto M coincidere, quam punctum contactûs H ad distantiam infinitam migraverit; Quo in casu contingens O H N in asymptoton degenerat; Vel quod idem est, Asymptotos ad punctum ab M infinite distans sectionem contingit.

Prop. XIV. Theor. XIII.

38. *Iisdem positis, quæ in præcedentibus; sit* I F G K *plani hyperbolæ, vel sectionum oppositarum, intersectio cum plano basis, occurrens asymptotis in* I, K, *sectioni vero in* F, G; *Si, per punctum quodvis in utrâvis sectionum oppositarum* H, *agatur recta* O H N, *rectæ* I K *parallela, asymptotis occurrens in* O, N, *&* *sectioni denuò in* R, *vel eandem fortè in* H *contingens; Dico* $IF \times FK = KG \times GI = OH \times HN = NR \times RO$.

Planum basis in quo est recta I K, planumque per O N huic parallelum, facient in superficie conicâ circulorum circumferentias D F G E, P H R Q, quas eorundem planorum intersectiones cum planis, asymptotos formantibus, *viz.* D I, E K, P O, Q N contingent in D, E, P, Q; & ob plana parallela erit $DI = PO$ & $EK = QN$; Si contingentes coeant in L, l, erit (ob circulum) $LE = LD$, $lQ = lP$, unde (ob sim. triang.) $LI = LK$, & $lO = lN$, i e. $EK = DI =$ (prius) $PO = QN$; erit ergo $EKq =$ (ob circulum) $KG \times KF = DIq = IF \times IG = POq = OH \times OR = QNq = NR \times NH$: Cum sit autem

$$\left.\begin{matrix} IF \times IG \\ IF \times IK - IF \times GK \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GK \times KF \\ GK \times IK - IF \times GK \end{matrix}\right.$$

erit $IF \times IK = GK \times IK$, i e. $IF = GK$; Parique modo erit $OH = RN$; Unde $IF \times IG = IF \times FK = KG \times GI = OH \times OR = OH \times HN = NR \times RO$.

Si contingentes sint parallelæ, erit (ob parallelas rectas) $DI = EK = QN = PO$. eodemque prorsus modo procedit demonstratio.

Si

Si OHN contingat hyperbolam, continget, & circulum; Unde $PO = OH = QN = NH$, & $POq = OHq = QNq = NHq = OH \times NH = DIq =$ (ut prius) $IF \times FK = KG \times GI$.

Scholium. Ostendi posset $IF = GK$, ductâ per L diametro LST, vel (si contingentes sint parallelæ) diametro iis parallelâ, bisecante DE in S, proindeque IK & FG in T; unde $IF = GK$; parique modo $OH = RN$; vel (in casu contactûs) $OH = HN$. Et, quoad cætera, demonstratio esset eadem.

Prop. XV. Theor. XIV.

In Hyperbola vel sectionibus oppositis, si binæ quælibet 39.
rectæ inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem 40.
Sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, utrinque in punctis B, C, F, G, *terminatæ; vel quarum una vel utraque sectionem, vel sectiones oppositas contingit ut in* C, G, *si opus productæ, utrique asymptoto occurrant in* A, D, E, H; *Dico rectangula* $AB \times BD$, $EF \times FH$, $CD \times CA$, $GH \times GE$ *esse sibi invicem æqualia.*

Si hæ rectæ parallelæ sint intersectioni plani sectionis cum plano basis, hæc propositio non differt à præcedenti; Sin minus, per punctorum B, C, G, F bina quælibet ex. gr. C, G agantur ad asymptotos usque rectæ ICK, LGQ, quæ intersectioni plani sectionis cum plano basis parallelæ intelligantur; Eruntque (ob rectas parallelas) triangula DCK, HGQ similia; uti etiam ICA, LGE Unde

$IC : CA :: LG : GE$ &

$CK : CD :: GQ : GH$ ductisque in se ordinatim antecedentibus & consequentibus, erit $IC \times CK : CA \times CD :: LG \times GQ : GE \times GH$. sed $IC \times CK =$ (per Prop. præced.) $LG \times GQ$; Ergo $CA \times CD = GE \times GH$. Pari omnino modo (Actis per reliqua puncta B, F rectis, ipsis ICK, LGQ parallelis) demonstrabitur $AB \times BD = CD \times CA = EF \times FH$, &c.

Coroll. 1. Hinc $CD = BA$, nam 39.

$AB \times BD$

39. 40. $$\left.\begin{matrix}A\,B\times B\,D\\ A\,B\times B\,C+A\,B\times C\,D\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}C\,D\times C\,A\\ C\,D\times B\,C+D\,C\times A\,B,\end{matrix}\right.$$
demptoque communi, erit $AB\times BC=CD\times BC$, *i. e.* $AB=CD$. Eodem modo $EF=GH$.

39. 40. *Coroll.* 2. Unde $AB\times AC=AB\times BD=EF\times FH=EF\times EG$. &c.

41. *Coroll.* 3. Recta A C D sectionem in C contingens, & ad asymptotos in A,D terminata à contactu C bisecatur.
Nam A B ubique $=CD$; & in hoc casu coincidunt
42. puncta B, C. Similiter si B C ad sectiones oppositas terminata per asymptotôn occursum transeat, ibidem bisecabitur. Nam CD ubique $=AB$, *i. e.* $CA=DB$; & in hoc casu coincidunt A, D.

41. *Coroll.* 4. Unde in casibus Corollarii 3^{ii} erit $EF\times FH$
42. $=ACq=BDq$ &c.

43. *Coroll.* 5. Coroll. 3^{m}. valet conversim. Nempe si recta A C D ad asymptotos in A, D terminata & sectioni occurrens in C ibidem bisecetur, eadem sectionem in C continget. Nam si sectioni denuo occurrat in B, erit
42. $AC=BD=CD$, hoc est, punctum B non erit à puncto C diversum. Similitèr si C B ad asymptoton in D bisecetur, Erit D communis asymptotôn occursus.

44. *Coroll.* 6. Binæ rectæ sectiones oppositas contingentes inter se parallelæ & ad asymptotos terminatæ d c a, D C A, sunt æquales. Nam $dc\times ca=DC\times CA$ & $dc=ca$, $DC=CA$.

44. *Coroll.* 7. Conjungens tactus contingentium parallelarum C *c* per asymptotôn occursum M transit. Nam per M ductâ C M & productâ; Hæc, ob A D in C bisectam, bisecabit huic parallelam *a d*, hoc est, transibit per *c*, unde non erit à C *c* diversa.

Lemma 2.

45. *In rectâ* A D *factâ utcunque* $AB=CD$, *sumptoque in*
46. *eadem quovis puncto* E; *Si* E *cadat inter* B, *&*
47. C; *dico*
$BE\times EC=AE\times ED-AC\times CD$; *vel*

B E ×

26.

5.

7.

48.
49.

$BE\times EC + AC\times CD = AE\times ED$. *vel &c.*

2. *Si* E *cadat inter* C, *&* D, *vel* (*quod eódem redit*) *inter* A, *&* B, *erit*

$BE\times EC = AC\times CD - AE\times ED$; *vel*

$BE\times EC + AE\times ED = AC\times CD$. *&c.*

3. *Si* E *sit in* AD *productâ, erit*

$BE\times EC = AE\times ED + AC\times CD$; *vel*

$BE\times EC - AE\times ED = AC\times CD$. *&c.*

Nam in primo casu

$$AE\times ED = AB\times EC + AB\times CD + BE\times EC + BE\times CD$$ 45.

$$AC\times CD = AB\times CD + BE\times CD + \left\{\begin{matrix} EC\times CD \\ EC\times AB \end{matrix}\right.$$

Unde $AE\times ED - AC\times CD = BE\times EC$.

In secundo casu,

$$AC\times CD = AB\times ED + BC\times ED + \left\{\begin{matrix} AB\times CE \\ CD\times CE \end{matrix}\right\} + BC\times CE,$$ 46.

$$AE\times ED = AB\times ED + BC\times ED + \left\{\begin{matrix} CE\times ED \\ CE\times CD \end{matrix}\right. - CEq;$$

Unde

$$AC\times CD - AE\times ED = BC\times CE + CEq = BE\times EC.$$

In tertio casu,

$$BE\times EC = \left\{\begin{matrix} BC\times DE + \left\{\begin{matrix} CD\times DE \\ AB\times DE \end{matrix}\right\} + DEq + CD\times DE \\ AE\times ED \end{matrix}\right\}$$ 47.

$$+\left\{\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} CDq \\ AB\times CD \end{matrix}\right\} + BC\times CD \\ AC\times CD. \end{matrix}\right\}$$

Schol. Coincidentibus punctis B, C, in primo casu coincidit his punctum E, & evanescit $BE\times EC$.

Coincidentibus vero B, C, transit casus secundus in 48.
illum 5, El. 2. tertius in 6, El. 2. ut cuivis obvium. 49.

Prop. XVI. Theor. XV.

50. 51. *In Hyperbola & sectionibus oppositis, si binæ quælibet*
52. 53. *rectæ* KN, ST, *vel utraque ad eandem sectionem,*
54. 55. *vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas, vel*
56. *altera ad eandem, altera ad oppositas in* K, N; S, T, *utrinque terminatæ, & si opus productæ, sibi mutuo occurrant in* E, *& utrique asymptoto in* R, V, M, L; *Dico*

$$\left.\begin{array}{l} KM\times MN \\ LN\times MN \end{array}\right\} : RT\times TV :: KE\times EN : SE\times ET.$$

57. 58. 2. *Idem erit de quadratis hujusmodi rectarum, quoties*
59. 60. *harum una vel utraque sectionem, vel utramque sectionum oppositarum, contingit, vel harum una per asymptotôn occursum transit.*

50. 51. Per utriusvis rectarum NK utrumlibet occursum
52. &c. cum sectione N, agatur recta XNY, rectæ alteri ST parallela, asymptotis occurrens in X, Y; erunt triangula LNY, LER similia, uti etiam MNX, MEV; Unde

$$LE : LN :: ER : NY$$
$$ME : MN :: EV : NX. \text{ Ductisque \&c.}$$

$LE\times ME : LN\times MN :: ER\times EV : NY\times NX$ id est (per lemma præced.) pro vario situ puncti E, & per prop. 15. cum *Coroll.* 2.

$$\left.\begin{array}{l} KE\times EN+KM\times MN \\ KM\times MN-KE\times EN \\ KE\times EN-KM\times MN \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} LN\times MN \\ \text{id est} \\ KM\times MN \end{array}\right\} :: \left\{\begin{array}{l} SE\times ET+RT\times TV \\ RT\times TV-SE\times ET \\ SE\times ET-RT\times TV \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} NY\times NX \\ \text{id est} \\ RT\times TV \end{array}\right.$$

Unde in primo & secundo casu div. in tertio comp. $KE\times EN : KM\times MN :: SE\times ET : RT\times TV$, unde alternando liquet propositum.

2. Ostensum est in parte prima $KM\times MN : RT\times TV :: KE\times EN : SE\times ET$: unde coeuntibus punctis K & N, T & S vel M & L, &c. erit

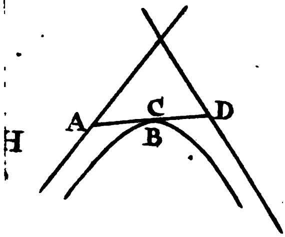
Fig. 57. 58. $KMq : RT\times TV :: KEq : SE\times ET.$

Fig. 60. $KMq : RT\times TV :: KE\times EN : SE\times ET.$

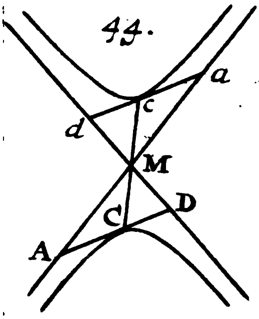
Fig. 59. $KMq : RTq :: KEq : TEq.$ Et sic in cæteris casibus.

Scholium. Coeuntibus punctis K, N; S, T &c. Lemma

43.

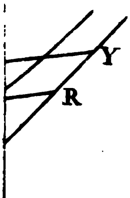


44.

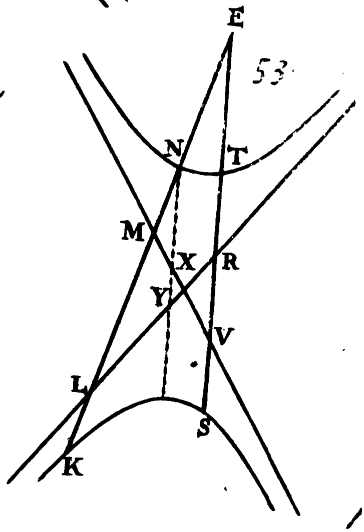


48

49



53



ma præcedens in hac demonstratione adhibitum non differt à 5, vel 6, El. 2, ut supra adnotavimus.

Coroll. Si angulus asymptotôn rectus intelligatur, & rectarum una KN, parallela sit, vel coincidat rectæ alicui ACB per asymptotôn occursum C transeunti, altera vero ST parallela rectæ DB in occursu rectæ AB unam sectionum oppositarum contingenti; Erit $KE \times EN = SE \times ET$. Nam ob ang. rect. & $DB = BI$, erit per 31. El. 3tii. $CBq = DBq$, & (per *Coroll.* 4. prop. 15.) $RT \times TV = DBq$, & $KM \times MN = CBq$. & sic in cæteris casibus. 56.

Prop. XVII. Theor. XVI.

In Hyperbola & Sectionibus oppositis si Recta quævis AB *ad eandem, vel ad oppositas sectiones utrinque terminata, & si opus producta, Vel binæ quælibet rectæ* AB, CD *inter se parallelæ, & vel utraque ad eandem sectionem, vel utraque ad oppositas, vel singulæ ad singulas utrinque terminatæ, & si opus productæ, Binis quibuscunque* FG, IH *inter se parallelis, & vel utrisque ad eandem sectionem, vel utrisque ad oppositas, vel singulis ad singulas utrinque terminatis, & si opus productis utcunque occurrant, ut in* E, T, *vel* E, T, S, V *punctis; Erunt rectangula ex segmentis ejusdem rectæ, vel binarum inter se parallelarum, proportionalia rectangulis ex conterminis segmentis binarum reliquarum, hoc est* 61. 62. 63. 64. 65. Supple figuras reliquorum casuum.

$AE \times EB : GE \times EF :: AT \times TB : IT \times TH$, &

$AE \times EB : GE \times EF :: CV \times VD : HV \times VI$. *&*

sic de binis quibusvis punctis.

2. *Sin recta quævis* AET *utrivis asymptoto parallela, sectioni in unico puncto* A *occurrens, binis istiusmodi parallelis* IHT, FGE *occurrat in* T, E; *erit* 66. 67. Supple figuras reliquorum casuum.

$HT \times TI : GE \times EF :: TA : EA$.

Eadem de rectarum contingentium quadratis intellige.

Rectæ omnes (si opus productæ) occurrant asymptotis in O, P, Q, R &c. ut in figuris. Erit ex præcedenti

$$AE \times EB : GE \times EF :: AO \times OB : GK \times KF$$

$$\& \ AT \times TB : IT \times TH :: AO \times OB \left\{ \begin{matrix} HM \times MI \\ GK \times KF \end{matrix} \right\}$$

Unde $AE \times EB : GE \times EF :: AT \times TB : IT \times TH.$
Pari modo ob $AO \times OB = CQ \times QD$ & $GK \times KF = HM \times MI$ probabitur

$$AE \times EB : GE \times EF :: CV \times VD : HV \times VI.$$

Nec aliter ratiocinabere de cæteris punctis; & in casibus contingentium.

66. 67. *Supple casus omissos.* 2. Sit asymptoton occursus B, & connectatur B A, Per puncta T, E ipsi BA parallelæ, agantur D T S, K E N; quæ occurrent necessariò utrique asymptoto in D, S; K, N, adeoque (per Coroll. 2. prop. 13.) utrique sectionum oppositarum in O, P; L, M; sint vero K, D puncta in asymptoto ipsi A E T parallela.

Erit (ob parallelas rectas) $AB = DT = KE$ & $BK = AE$, $BD = AT$.

Porro (ex priore parte, & ex lemmate 2.) erit in casu Figuræ 66.

$$HT \times TI : GE \times EF :: \left\{ \begin{matrix} OT \times TP \\ DT \times TS + OS \times SP \\ AB \times TS + ABq \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} LE \times EM \\ KE \times EN + LN \times NM \\ AB \times EN + ABq \end{matrix} \right\}$$

$$:: \left\{ \begin{matrix} TS + AB \\ DS \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} EN + AB \\ NK \end{matrix} \right\} :: (\text{ob sim. triang.}) \left\{ \begin{matrix} DB \\ TA \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} KB \\ EA \end{matrix} \right\}$$

Nec aliter in casu contactûs.

Eodem modo, per Lemma 2. (pro vario situ punctorum T, E, mutatis mutandis) patebit in omnibus casibus.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

68. 69. 70. 71. 72. *Supple reliquos casus.* *Quæ in Hyperbola, & sectionibus oppositis superiori propositione ostendimus, propositum sit in Ellipsi & Parabola ostendere. Scilicet, (positis rectis* R O, L M, *parallelas, sectionique in* R, O, L, M, *occurrentes, rectis* H F, Y Z *parallelis, & sectioni in* H, F, Y, Z *occurrentibus,*

occurrentibus, in punctis G, B, X, V, *occurrere,) erit*

GO×GR : LE×EM :: HG×GF : HE×EF

GO×GR : HG×GF :: LX×XM : ZX×XY

& sic de binis quibusvis punctis.

2. *Sin Recta* FH *occurrens Parabolæ in unico puncto* F, *occurrat parallelis* RGO, LEM, *in* G, E; *erit* 75. *Supple reliquos casus.*

FG : FE :: GO×GR : LE×EM.

Eadem de contingentium quadratis intellige.

In Ellipsi, vel Parabola in Conica superficie factâ, sint rectæ eædem quæ in figuris 68, 69. &c. neglectâ tantum in præsens rectâ ZY. 73. 74. *Supple casus reliquos.*

Per rectarum RO, LM alterutram RO, & coni verticem I transeat planum RIO, secans superficies conicas in rectis IR, IO; Secundum quas plana IRK, ION superficies contingant, se mutuo secantia in IT, & planum sectionis in RK, ON.

Per LM transeat planum, plano RIO parallelum, faciens sectiones oppositas LDMAS, secansque plana tangentia in rectis TK, TN quæ erunt propterea asymptoti.

Per HF & coni verticem I transeat planum, secans superficies conicas in rectis HIA, IDF, planum RIO in IG, planum sectionum in ABCDE, planaque asymptotos formantia in IB, IC. *In fig. 74. rectam* IC, *vitandæ confusionis ergò non expressimus.*

Recta AD est ad alteram, sive utramque sectionum oppositarum in A, D terminata, occurritque asymptotis in B, C.

Per punctum D, in plano sectionum oppositarum agatur, usque ad asymptotos, recta PDQ parallela KLEMN.

Ob plana parallela, & rectas parallelas PDQ, KLEMN, similia erunt triangula RGI, & PDB; GIO, & DCQ. Pariter HIG & HAE; FDE, & FIG, Unde

IG : DE :: GF : FE &

IG : AE :: HG :: HE Ductisque &c.

IGq : AE×DE :: HG×GF : HE×FE. Rursum

IG

$IG : GO :: CD : DQ$
$IG : GR :: BD : DP$ Ductisque &c.

$$IGq : GO \times GR :: CD \times BD : \begin{cases} DQ \times DP \\ KM \times MN \end{cases}$$

:: (per prop. 16.) $AE \times ED : LE \times EM$ & altern.
$IGq : AE \times ED :: GO \times GR : LE \times EM ::$ (prius) $HG \times GF : HE \times FE$.

Probandum restat

68, 69. $RG \times GO : HG \times GF :: LX \times XM : ZX \times XY$

70, 71. Jam vero ostendimus

72. $RG \times GO : HG \times GF :: LE \times EM : HE \times EF$

Supple reliquos casus. & pari ratione erit

$LE \times EM : HE \times EF :: LX \times XM : ZX \times XY$

unde

$RG \times GO : HG \times GF :: LX \times XM : ZX \times XY$

Pariter de punctis E, V. Nec aliter in rectis contingentibus

75. *& Fig. 26. supra. Supple reliquos casus.* 2. Factis ut in priore parte. Cum recta F H respondeat rectæ I K in fig. prop. 12, pro Parabola, recta I A quæ fit à plano per rectam F H & verticem I respondebit rectæ A D in eâdem figura; hoc est, erit F H parallela I A unde $IG = AE$.

Estque ob sim. triang.

$FG : FE :: IG : DE :: IGq : IG \times DE = AE \times DE$

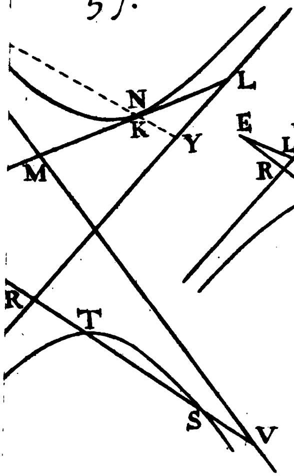
ostendetur verò ut supra

$IGq : AE \times DE :: GO \times GR : LE \times EM$ unde
$FG : FE :: GO \times GR : LE \times EM$. Pariterque in casibus contactûs.

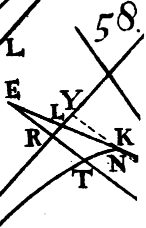
Scholium. Theorema hoc cum præcedenti licuisset simul unâ propositione complecti, eademque operâ è cono demonstrasse: Cum tamen in hyperbola & sectionibus opp. hæc proprietas etiam in plano se proderet, quo Tyronibus aliquatenus consultum esset, libuit seorsim demonstrare.

SECTIO

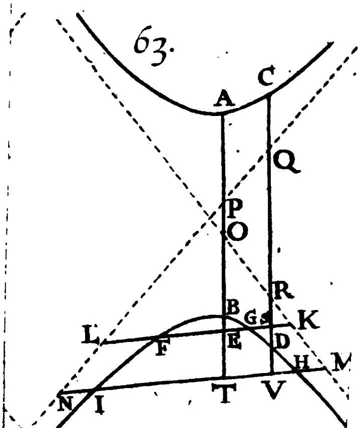
57.



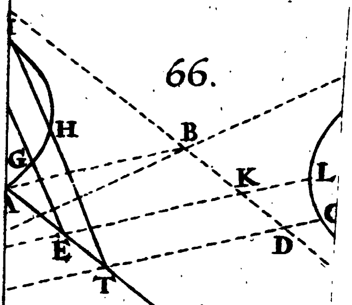
58.



63.



66.



MBurg

SECTIO II.

Prop. XIX. Theor. XVIII.

In omni Sectione conica, & Sectionibus oppositis, si binæ rectæ BI, CI *contingentes sectionem, vel sectiones oppositas in extremis rectæ cujusvis* BC, *sectioni, vel sect. opp. in binis punctis* B, C *occurrentis, concurrant in* I, (*vel in Ellipsi & sect. opp. sint forte inter se parallelæ*) *& ex utravis parte tactus conjungentis* BC *ducatur recta* EF, *ipsi* BC *parallela, quæ* (*si opus producta*) *occurrat sectioni, vel sectioni oppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in binis punctis* E, F, *& rectis contingentibus in* D, G; *Dico* DE = FG. 76. 77. 78. *Tam Parabola quam Ellipseos figura numero 76 (per errorem) designatur. Rectæ* OHN, QKR *spectant ad prop. seq.*

FActâ in superficie conica, sectione, vel sectionibus oppositis, positisque ut in prioribus figuris. Per coni verticem A ducantur AB, AC; Plana per rectas AB, BI & AC, CI superficiem contingent. 79. *Pro Hyperb. Parab. & Ellipsi. Supple figuram sect. opp.*

Per DEFG transeat planum, plano ABC parallelum, faciens sectionem vel sectiones EKF, & secans plana tangentia in DH, HG; Erit EKF hyperbola, vel sectiones oppositæ; eruntque HD, HG asymptoti, ac proinde DE = FG.

In Hyperbola & sectionibus oppositis, hæc propositio in plano demonstrari potest in hunc modum.

Sint AV, AT asymptoti, occurrentes contingentibus (si opus productis) in T, V, rectæ BC (si opus productæ) in X, Y, & rectæ DG in R, S; bisectâque BC in M, juncta IM [vel || BI, CI] secet EF in L. 77. 78.

Per prop. 16, IBq : ICq :: BTq : VCq; ergo BC & TV parallelæ sunt, unde (ob BM = MC) recta IM bisecabit connexam TV in Z.

Rursus (ob BX = YC & BM = MC) erit XM = MY

= MY; ſi ergo per aſymptotôn occurſum A ducatur recta AM, hæc (propter parallelas XY, TV & biſectas in M, Z) tranſibit per Z, hoc eſt non differet ab IM primo ductâ.

Jamque (ob BM = MC,) erit DL = LG; & (ob XM = MY) erit RL = LS; unde DR = SG; ſed & RE = SF, unde DE = GF.

Coroll. 1. DF = GE.

Coroll. 2. Si (coeuntibus punctis E, F,) recta DG ſectionem contingat, à tactu biſecabitur. Si vero puncta E, F ſint ad ſectiones oppoſitas, recta DG in contingentem abire non poteſt, ut ex ſupra dictis manifeſtum.

Prop. XX. Theor. XIX.

76. 77. 78. *Supple figuras contingentium parallelarum.*

Iiſdem poſitis, Si per contingentium occurſum I, *&* *medium punctum* M *tactus conjungentis* BC, *ducatur recta* IM; *vel ſi contingentes ſint parallelæ, per* M *ducatur* IM *ipſis contingentibus parallela, Hæc rectas omnes* EF *ipſi* BC *parallelas, & ad ſectionem vel ſectiones oppoſitas utrinque terminatas, biſariam ſecabit.*

Nam ob ſimilia triang. IBC, IDG & BM = MC, erit etiam DL = LG; eſtque (per præced.) DE = FG, & DF = GE, unde additis vel demptis æqualibus erit LE = LF.

Si contingentes ſint parallelæ, erit BM = DL = MC = LG &c. ut prius.

Def. Rectæ IM hoc modo genitæ, atque infinitè extenſæ *Diametri.* appellantur.

Ipſæ vero MC, vel MB, atque omnes his parallelæ LF, vel LE, intra ſectionem, vel inter ſectiones oppoſitas, dicuntur *Ordinatæ* ad diametrum IM.

Coroll. 1. Ob ordinatas ſic biſectas in Hyperbola, & Parabola, (quarum curvæ poſt BC infinite ſe utrinque extendunt) diameter in unico tantum puncto H ſectioni

ſectioni occurrit; In hyperbola tamen occurret, eâdem de cauſa, ſectioni oppoſitæ in K. Ellipſi occurret in binis punctis H, K. Inter ſectiones oppoſitas neutri earum omninò occurrit.

Def. In Hyperbola, vel Sect. opp. & Ellipſi, Diametri infinite extenſæ pars H K *Diameter tranſverſa* dicitur. 76. 77.

Et in omnibus ſectionibus punctum H, vel K *Vertex* dicitur; & in opp. Sect. & Ellipſi dicitur vertex K vertici H *Oppoſitus*, & viciſſim.

In oppoſitis ſectionibus Diametri H K utrique ſectioni occurrentes vocantur Diametri *Determinatæ*; Diametri vero inter ſectiones *Indeterminatæ*. Utriuſque nominis ratio in aperto eſt. 77. 78.

In omnibus ſectionibus partes H M, H L, vel K M, K L vocantur *Diametri Interceptæ* vel *Abſciſſæ*. 76. 77.

Coroll. 2. In Hyperbola & Ellipſi; cum ſit B M x M C = M Cq, E L x L F = L F q erit (per prop. 17. & 18.) K M x M H : K L x L H :: M Cq : L F q. Et ſic ubique.

Coroll. 3. In Parabola, cum Diametri in unico tantum puncto H ſectioni occurrant, liquet (per prop. 12.) eas non diverſas eſſe à rectis I K factis à plano per contactum A D, planumque ſectionis in I K ſecante; adeoque (ob planum A D E plano ſectionis parallelum,) eſſe omnes inter ſe parallelas; Et porro idem præſtare, quod eædem rectæ I K in prop. 18. 76. & *In fig. prop. 12 pro Parabola.*

Coroll. 4. Et propter ordinatas biſectas, (per prop. 18.) Erit in Parabola 76.

H M : H L :: M C q : L F q; Et ſic ubique.

Coroll. 5. Per *Coroll.* 2. liquet ordinatas ad quamlibet diametrum in Ellipſi, quo magis ab utroque vertice diſtant, eo majores eſſe, donec ad medium diametri punctum deventum ſit; Eritque ordinata per hoc punctum maxima. Et quæ binæ æqualiter ab utroque vertice diſtant ſunt æquales; Et converſim. Ita enim ſe res habet in rectangulis ex ſegmentis diametri, quibus ordinatarum conterminarum quadrata proportionalia ſunt. 76.

76. 77. *Coroll.* 6. Similiter in Hyperbola & Parabola, quo longiùs ordinatæ à diametri vertice distant, eo sunt majores. Et in oppositis sectionibus, quæ binæ æqualiter ab utroque ejus vertice distant, sunt æquales; Et conversim.

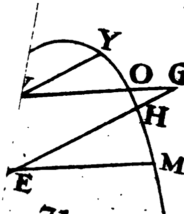
76. 77. *Coroll.* 7. In Hyperbola & Parabola, quarum curvæ infinite se extendunt, fiunt tandem ordinatæ datâ quâvis rectâ *lf* majores. Nam si in Hyperbola ita sumatur punctum L ut sit $KL \times LH : KM \times MH \sqsubset lfq : MCq$ erit (propter *coroll.* 2.) $LF \sqsubset lf$. Eodem modo (mutatis mutandis) liquet in Parab. per *Coroll.* 4. Unde porrò recta diametro cuivis parallela, sectioni, vel utrique sectionum oppositarum necessariò occurret.

76. 77. *Coroll.* 8. In omni sectione, Quæ H N, vel K P per verticem H, vel K ducitur ordinatis parallela, Sectionem contingit; Et conversim. Nam si aliqua ejus pars sit intra sectionem, à diametro bisecabitur, quæ tamen huic non occurrit nisi in ipsa sectione. 2. Quæ in H vel K contingit, erit ordinatis parallela. Nam binæ rectæ diversæ in eodem puncto non contingunt.

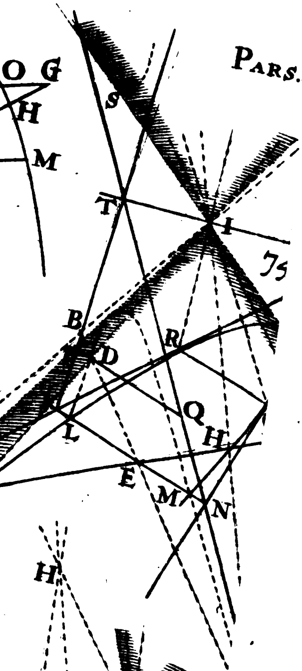
80. 81. *Coroll.* 9. In Ellipsi & Sectionibus oppositis, Recta H K conjungens tactus contingentium parallelarum est diameter rectarum B C, E F hisce contingentibus parallelarum. Nam si quævis alia V R dicatur earum diameter, rectæ in ejusdem extremis V, R, rectis B C, F E parallelæ, (per præced. *Coroll.*) sectionem contingent, unde aut plures duabus rectis parallelis sectionem, vel sect. opp. contingent, contra *Coroll.* 5. prop. 11, aut non erit V R ab H K diversa.

80. 81. *Coroll.* 10. In omni sectione conicâ, & in sect. opp.
82. 83. & inter sect. opp. Quæ binas rectas inter se parallelas, vel utrasque ad eandem sectionem, vel utrasque ad oppositas, vel singulas ad singulas utrinque terminatas, bisecat, Erit harum, atque omnium his parallelarum diameter. Nam propria diameter has bisecat, & binæ rectæ à se invicem diversæ has bisecare non possunt.

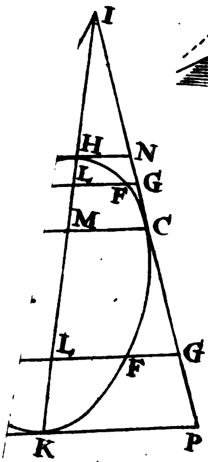
80. 81. *Coroll.* 11. Et in omnibus sectionibus, & in sect.
82. opp.

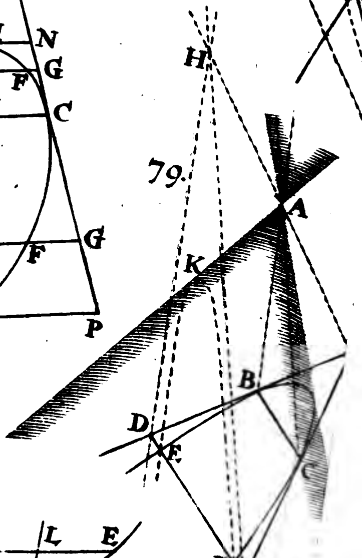

Y
O G
H
M
E

71.

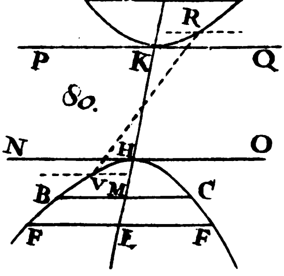

S
T
I
B
D
R
Q
L
H
E
F
M
N

75


I
H N
L G
F
M C
L G
F
K P


H
A
K
B
D
E
C
F
G

79.


F L E
R
P K Q
N H O
V
B M C
F L F

80.

opp. si recta H O in quovis puncto H sectionem, vel utramvis sectionum oppositarum contingat, atque huic parallela quævis B C sectioni, vel utrivis sectionum oppositarum in punctis B, C occurrat, Recta H M, quæ tactum H, & medium punctum M rectæ B C conjungit, erit hujus atque huic parallelarum diameter. Patet ut *Coroll.* 9.

Coroll. 12. In Parabola, Si in puncto quolibet H contingat H O, sitque huic parallela quælibet B C utrinque ad sectionem terminata; Quæ H M per tactum H ducitur diametro cuivis S T parallela, erit rectæ B C, atque huic parallelarum, diameter. Nam harum diameter (per *Coroll.* præced.) per H transit, & (per *Coroll.* 3.) est parallela S T, ideoque non est ab H M diversa. 82.

Coroll. 13. Parabolæ diameter, præter ordinatas suas, nullam rectam utrinque ad sectionem terminatam bisecat. Nam propria diameter hanc bisecat, Et à duabus rectis parallelis, à se invicem diversis, bisecari nequit.

Coroll. 14. Ideoque in Parabola, duæ rectæ ad sectionem utrinque terminatæ se mutuo non bisecant.

Coroll. 15. Contingens parabolam omnibus diametris productis occurrit. Et quælibet recta utrinque ad parabolam terminata & si opus producta, omnibus diametris si opus productis occurrit. Nam quæ uni parallelarum occurrit, occurrit omnibus. 82.

Coroll. 16. Si in Parabolâ recta quævis H M, diametro cuivis S T parallela, rectam quamvis B C utrinque ad sectionem terminatam bisecet, Erit hujus atque huic parallelarum diameter. Nam omnes diametri sunt parallelæ (per *Coroll.* 3.) Et (per 13.) præter ordinatas suas nullam omnino rectam ad sectionem utrinque terminatam bisecant. 82.

Coroll. 17. In omnibus sectionibus, & sectionibus oppositis, ex diametrorum genesi liquet Contingentes in extremis rectæ cujusvis B C, ad diametrum quamlibet H *b* ordinatæ, super eâdem diametro coire in aliquo puncto I; aut esse eidem parallelas. 76. 77. 78.

Prop.

Prop. XXI. Theor. XX.

84. 85. *In Ellipsi, & sectionibus oppositis, Quæ* DHE *per medium punctum* H *diametri cujusvis* AB (*quæ in opp. sect. sit determinata*) *utcunque ducitur, Sectioni vel sectionibus oppositis in punctis* E, D *occurrens, à puncto* H *bifariam dividitur.*

Si DHE sit ad diametrum AB ordinata, jam liquet propositum. Sin minùs; è punctis E, D intelligantur ordinatæ ad diametrum AB, rectæ EG, DF; Quæ parallelæ cum sint, erunt triangula HEG, HDF simi-similia;

Per *Coroll.* 2. præced. erit
BF x FA : BG x GA :: DFq : GEq :: (propter sim. triang.) FHq : GHq unde alternando, & componendo in Ellipsi, dividendo in oppositis sectionibus,

$$\left.\begin{array}{l} BF \times FA + FHq \\ FHq - BF \times FA \\ \quad i.e.\ HAq \end{array}\right\} : FHq :: \left\{\begin{array}{l} BG \times GA + GHq \\ GHq - BG \times GA \\ \quad i.e.\ HAq \end{array}\right\} : GHq$$

Unde FH = GH & ob sim. triang. inde DH = HE.

Prop. XXII. Theor. XXI.

86. 87. *In Hyperbola, vel oppositis sectionibus, omnes diametri coeunt in occursu asymptotôn* H, *quarum determinatæ ibidem se mutuò bisecant. Et in Ellipsi omnes diametri coeunt, & se mutuò bisecant, in communi quodam intra sectionem puncto* H.

86. Cum diametri determinatæ in hyperbola vel opp. sect. jungant tactus contingentium parallelarum, transeunt omnes (per *Coroll.* 7. prop. 15.) per punctum H, & (per *Coroll.* 3. ejusdem prop. 15.) ibidem bisecantur. Indeterminatæ vero bisecant omnes ordinatas suas inter sectiones, quarum una necessariò per H transit, & ibidem bisecatur; Omnes itaque diametri indeterminatæ pariter per H transeunt.

In

In Ellipsi, si per duarum quarumlibet diametrorum A B; E D media puncta C, H ducatur F C H G, sectioni utrinque occurrens, hæc (per præced.) tam in C, quam in H bisecabitur; Coeunt itaque puncta C, H; unde liquet propositum. 87.

Def. Punctum H *Centrum*, dicitur. 86. 87.

Corollaria ad hanc & præcedentes aliquot propositiones.

Coroll. 1. Omnis recta E H per punctum quodvis E Ellipseos, vel utriusvis sectionum oppositarum, & centrum H ducta, est diameter rectarum contingenti in puncto E parallelarum. 88. 89.

Coroll. 2. Et omnis recta H M, per centrum H, & medium punctum M rectæ cujusvis B C ad Ellipsim, vel hyperbolam, vel sectiones oppositas utrinque terminatæ, ducta, est hujus atque huic parallelarum Diameter. 88. 89.

Nam bisecabit ad centrum (per prop. præced.) rectam rectæ B C parallelam; unde (per *Coroll.* 10. prop. 20.) erit harum diameter.

Coroll. 3. In Ellipsi, & Hyperbolâ, & inter sectiones oppositas; Diameter, præter ordinatas suas, nullam rectam ad sectionem, vel sectiones oppositas terminatam (nisi in centro) bisecat. Nam omnis hujusmodi recta à propria diametro bisecatur, & à binis rectis à se invicem diversis (nisi in communi earum occursu) bisecari nequit.

Coroll. 4. Atque hinc binæ rectæ ad Ellipsin, Hyperbolam, vel Sectiones oppositas, terminatæ (nisi in Centro) se mutuò non bisecant.

Coroll. 5. In oppositis Sectionibus, & in Ellipsi, partes oppositæ à quavis diametro A B abscissæ suprapositæ congruunt. Nam ductâ aliâ quâvis diametro E H D, & suprapositis figuris, congruent (ob æquales rectas & angulum communem) puncta H, A, D, punctis H, B, E respectivè; & sic de cæteris punctis. 86 87.

Coroll. 6. Unde ipsæ sectiones oppositæ supra positæ congruent. 86.

Prop.

Prop. XXIII. Theor. XXII.

90. 91. *In sectionibus oppositis, & in Ellipsi, Si per centrum C agatur recta* E D *diametri alicujus* A B (*quæ in opp. Sect. sit determinata*) *ordinatis* G I *parallela, Bisecabit hæc rectas omnes* F G *diametro* A B *parallelas, & ad sectionem, vel sectiones oppositas, utrinque in* F, G *terminatas. Et conversim.*

A punctis F, G intelligantur ad diametrum A B ordinatæ F H, G I; Ob rectas parallelas erit F H = G I, unde (per convers. *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) A H = B I, & (ob A C = C B) H C = C I = (ob rectas parall.) G M = M F.

2. Si F G bisecetur à recta E D in M, erit parallela A B. Nam factis ut supra, Erit (ob F H parall. G I) F M: H C :: M G : C I *i. e.* (ob F M = ex hyp. M G) H C = C I, unde & A H = B I, & (per *Coroll.* 5. & 6. prop. 20.) F H = G I : Ergo cum sit H F || G I erit F G
90. 91. || A B.

Coroll. 1. Hinc recta F G est ad diametrum E D ordinata.

Def. Diameter E D infinitè extensa dicitur diametro
91. A B *Conjugata.*
90. In Ellipsi eadem utrinque in E, D ad Sectionem terminata, Vel in oppositis sectionibus, abscissis utrinque C D, C E, ut sint eædem contingentis in utrovis vertice B, ad asymptotos utrinque terminatæ, partibus B K, B L æquales, (proindéque æquales inter se) Dicitur D E *Secunda diameter* diametro A B *conjugata,* & vicissim.

Coroll. 2. Conjugatarum diametrorum ordinatæ sunt diametris suis reciproce parallelæ, Conjugatæ diametri sunt ad se mutuò ordinatæ, Et cujusvis diametri unica est conjugata.

90. *Coroll.* 3. Ordinatarum ad diametrum quamvis E D inter sectiones oppositas (*i. e.* indeterminatam) minima est

est quæ per centrum transit, & à centro remotiores sunt propioribus majores, fiuntque tandem datâ quâvis rectâ S T majores. Nam quo major est C M *i. e.* I G, eo major B I, & proinde eo major C I = M G. Sumptâque C I ⊏ S T ductâque I G parallelâ E D, & G M parallelâ I C, erit ordinata G M = C I, *i. e.* ⊏ S T.

Coroll. 4. In oppositis sectionibus, conjugatarum diametrorum una est determinata, altera indeterminata. Nam ordinata ad diametrum determinatam occurrit utrique asymptoto in P, Q ad easdem partes cum sectione, unde huic parallela extra angulum asymptotôn cadet. Et vice versa. 90.

Coroll. 5. Cum omnis recta per quodvis punctum in utrâvis sectionum oppositarum (modo asymptoto non parallela, nec sectioni oppositæ occurrens) eidem sectioni denuò occurrat, sitque ad diametrum aliquam determinatam ordinata, habeatque rectam aliquam per centrum extra angulum asymptotôn cadentem sibi parallelam; Atque omnis recta intra angulum asymptotôn cadens sit diameter determinata: Liquet omnes rectas per centrum ductas esse diametros; Exceptis tantummodò Asymptotis, quæ quasi limites sunt, qui determinatas diametros ab indeterminatis disterminant, & in quas diametri (ut de contingentibus jam olim dictum est) ultimò degenerant. Nam abeunte puncto B in infinitum, Contingens K B L (accedente puncto L ad C,) cumque hâc huic parallela E D, atque has conjungens C B, asymptoto C K omnes coincident, ut advertenti facilè patebit. 90.

In Ellipsi omnes omnino rectæ per centrum (per *Coroll.* 1. prop. 22.) erunt diametri.

Coroll. 6. In Hyperbolâ, vel oppositis sectionibus, & Ellipsi, Contingens in vertice cujuslibet diametri occurrit omnibus diametris, si opus productis, exceptâ duntaxat huic conjugatâ. Idem de ordinatis ad quamlibet diametrum (si opus productis) intellige.

Coroll. 7. In Hyperbolâ, & Ellipsi, C B q : C D q :: A I x I B : I G q. Nam in hyperbola, C D q = B L q, 90. 91.
&

& $OI \times IG = IGq$, unde patet per prop. 16. In Ellipsi $CBq = AC \times CB$, unde patet per *Coroll.* 2. prop. 20.

90. *Coroll.* 8. Si angulus asymptotôn sit rectus, erit ubique $CB = CD$, si acutus $CB \sqsubset CD$, si obtusus $CB \sqsupset CD$. Nam semicirculus diametro $KL = ED$ in primo casu transibit per C, in secundo citrà, in tertio ultra C, unde CB respectivè $=, \sqsubset, \sqsupset$ BL *i. e.* CD.

91. si Ellipsis sit circulus erit ubique $CB = CD$.

Prop. XXIV. Theor. XXIII.

92.. 23. *In Hyperbolâ & Ellipsi, sit quælibet diameter* DF, *(quæ tamen in hyperbolâ sit determinata) cujus vertex* D, *vertex oppositus* F, *secunda diameter huic conjugata* GB, *& ad* DF *quælibet ordinata* KN; *Fiat ipsis* FD : GB : *tertia proportionalis* LR, *in quâ (ultra* R *productâ in Hyperbolâ) sumatur punctum* M, *ut sit* $FD : DK :: LR : MR$; Dico $NKq = FK \times MR = DK \times LM$.

Ob $FD : DK :: LR : MR$ erit componendo in Hyperb. dividendo in Ellipsi

$$\left.\begin{matrix} FD \pm DK \\ FK \end{matrix}\right\} : DK :: \left\{\begin{matrix} LR \pm MR \\ LM \end{matrix}\right\} : MR,$$

Unde $FK \times MR = DK \times LM$. Rursum ob $FD : GB : LR \div$ erit

$FD : LR :: FDq : GBq ::$ (horum subquadrupla) $CDq : CBq ::$ (per *Coroll.* 7. præced.) $DK \times FK : NKq ::$ (ex hyp.) $DK : MR :: DK \times FK : MR \times FK$, Ergo $NKq = MR \times FK = DK \times LM$.

Def. Recta LR dicitur *Latus rectum* sive *Parameter*.

Rectangulum ex diametro quâvis & suâ parametro $FD \times LR$ vocatur *Figura* istius diametri.

Coroll. 1. In hyperbolâ, si angulus asymptotôn sit rectus, erit omnis diameter suæ parametro æqualis &c. patet ex *Coroll.* 8. præced.

Def. Hujusmodi vero hyperbola, ob transversam diametrum (quæ & Latus transversum quandoque dicitur)

parametro

parametro sive lateri recto æqualem, dicitur Hyperbola *Æquilatera*.

Coroll. 2. Si Ellipsis sit Circulus, erunt omnes parametri diametris suis & sibi ipsis æquales.

Coroll. 3. Et in quâlibet Ellipsi, binæ quælibet diametri conjugatæ sunt duæ mediæ proportionales inter earum parametros. Idem in Hyperbolâ intellige.

Coroll. 4. G B q = figuræ diametri F D; & C B q = $\frac{1}{4}$ ejusdem fig.

Coroll. 5. D F : L R : : D K × F K : N K q. Patet supra. 92. 93.

Coroll. 6. Quadratum ordinatæ N K in Hyperbolâ excedit rectangulum ex parametro L R & diametro interceptâ D K, *i. e.* L R × D K, rectangulo D K × M R, quod simile est figuræ diametri F D × L R. Nam N K q = D K × L M = L R × D K + M R × D K. Et F D : D K : : L R : M R, *i. e.* F D × L R simile D K × M R. 93.

Coroll. 7. In Ellipsi vero, Quadratum ex N K deficit à rectangulo L R × D K, rectangulo D K × M R, quod simile est figuræ diametri; Et à rectangulo L R × F K, rectangulo F K × L M, quod eidem figuræ etiam simile est. Nam N K q = D K × L M = R L × D K — M R × D K; Et N K q = F K × M R = F K × L R — F K × L M. Estque (ut prius in Hyperbolâ) F D × L R simile D K × M R, simile F K × L M. 93.

Schol. Ex hoc excessu & Defectu quadratorum ex Ordinatis, in HYPERBOLA, & ELLIPSI, Magnus ille è veteribus Geometra APOLLONIUS *Pergæus* hæc nomina sectionibus imposuit, quibus usa est omnis posteritas.

Prop. XXV. Theor. XXIV.

In Parabola, sit quælibet diameter D C, *& ad hanc quælibet ordinata* B C; *si interceptæ diametro* D C *& conterminæ ordinatæ* C B, *fiat tertia proportionalis* L R; *Dico quadratum ordinatæ cujusvis ad eandem diametrum* K N *æquale esse rectangulo ex eadem recta* L R *& interceptâ diametro* D K, *viz.* N K q = L R × D K. 94.

 Ob

Ob $DC : CB : LR$ ∺ erit $CBq = DC \times LR$. Et (per *Coroll.* 4. prop. 20.)

$\left.\begin{matrix} CBq \\ DC \times LR \end{matrix}\right\} : NKq :: DC : DK :: DC \times LR : DK \times LR.$

Unde $NKq = DK \times LR$; & sic ubique.

Def. Recta LR (sicut in Hyperbolâ & Ellipsi) dicitur *Latus rectum* seu *Parameter*.

Schol. Ex eo quod quadratum ordinatæ *Comparatum* sive *applicatum* rectangulo ex abscissâ & parametro, eidem æquale sit, Hæc sectio *Apollonio* PARABOLA dicta est.

Prop. XXVI. Theor. XXV.

95. 96. *In Parabola, si binæ quælibet diametri* C D, G E (*quarum vertices* C, G) *si opus productæ, rectæ cuivis* I H *utrinque ad Sectionem in* I, H *terminatæ, & si opus productæ, occurrant in binis punctis* D, E, *vel binis quibusvis rectis inter se parallelis* I H, O P, *ad sectionem ut prius terminatis occurrant in* D, Q, E, R; *Si recta sit unica, Erit,*

$ID \times DH : HE \times EI :: CD : GE$. *Sin binæ sint rectæ,* $ID \times DH : OR \times RP :: CD : GR$; *& sic de cæteris punctis.*

96. *Idem erit de quadratis contingentium, si coeuntibus ex. gr. punctis* H, I *recta unica, vel binarum rectarum alterutra fiat contingens, viz.* $HDq : IEq :: CD : GE$ &

$HDq : OR \times RP :: CD : GR$ *& sic de cæteris punctis.*

Bisectis I H, O P in S, T, Connexa S T occurrat sectioni in A, erit hæc rectarum I H, O P diameter; ductâque L A K his parallelâ occurrente diametris in L, K, eadem sectionem in A continget; à punctis C, G intelligantur ordinatæ ad diametrum A S T rectæ C M, G N, quæ erunt propterea rectis L A K, I H, O P parallelæ; Erit per prop 18.

1 $ID \times DH : \left\{\begin{matrix} LAq \\ CMq \end{matrix}\right\} :: CD : CL$ & per *Corol.* 4. prop. 20.

2. NGq:

2. NGq : CMq :: $\left\{\begin{matrix}NA\\GK\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}MA\\CL\end{matrix}\right\}$ ergo ex æquo
I D × D H : N G q :: C D : G K ; & per prop. 18.
3. H E × E I : $\left\{\begin{matrix}AKq\\NGq\end{matrix}\right\}$ :: G E : G K ; ergo ex æquo
4. I D × D H : H E × E I :: C D : G E.
Rursus, per prop. 18.
5. O R × R P : H E × E I : G R : G E; ergo per proport. 4. & 5. ex æquo
I D × D H : O R × R P :: C D : G R. & sic de cæteris punctis.

Si recta D I H E sit contingens, coeuntibus punctis H, I fit I D × D H = D H q & E I × E H = I E q &c.

Coroll. Si V X sit parameter diametri A S T, erit G E 95. 96.
: V X = I E × E H, & sic de punctis D, Q, R. Nam
(per hanc prop. 26.) I S × S H = S Hq : I E × E H ::
A S : G E :: V X × A S : V X × G E; Sed V X × A S (per
prop. præced) = S H q; Ergo & V X × G E = I E ×
E H *i. e.* V X : I E :: E H : G E. Hoc est, ut parameter diametri cujusvis in Parabolâ, ad summam duarum
quarumlibet ordinatarum ad eandem diametrum; sic earum differentia, ad differentiam abscissarum. Nam V X 95.
est Parameter, I E (ob I S = S H & S E = N G) est summa ordinatarum S H, N G; E H est earum differentia,
Et E G = N S est abscissarum A S, A N differentia.

Prop. XXVII. Theor. XXVI.

Si duæ rectæ L A, A E, *quamlibet è sectionibus conicis,* 97. 98.
vel sectiones oppositas in L, E *contingentes, vel qua-* 99. 1.
rum una A L *in hyperbola, vel sectionibus opp. sit* 2. 3.
forte asymptotos, concurrant in A, *Recta vero quævis* N D *earum alteri* E A *parallela* (*si opus producta*) *alteri* L A (*si opus productæ*) *occurrat in* B, *& sectioni, vel utrivis sectionum oppositarum in* N, D, *& tactus conjungenti* L E *vel* (*si* L A *sit asymptotos*) *rectæ per tactum* E *asymptoto* L A *parallelæ, in* R; *Dico* B R q = B D × B N.

97. 98. *Idem erit de quadrato ex* BD *vel* BN, *si coeuntibus*
99. 1. *punctis* N, D, *recta* RBDN *ellipsin, vel unam è sectionibus oppositis contingat.*

97. 98. Nam (per prop. 17. vel 18.) $BD \times BN : BLq ::$
99. 1. 2. $AEq : ALq ::$ (ob sim. triang.) $BRq : BLq$. Ergo
3. $BD \times BN = BRq$.

3. Si (tactu L in infinitum abeunte) recta AL fiat asymptotos, erit (ob punctum L infinite distans) EL parallela AL unde $BRq = AEq =$ (per *Coroll.* prop. 15.) $BD \times BN$.

97. 98. 2. Coeuntibus punctis D, N, fit $BD \times BN = BNq$
99. 1. vel $BDq =$ (prius) BRq.

Coroll. Si RBDN sit contingens, ob $BRq = BNq$, Erit $BR = BN$ vel BD.

Prop. XXVIII. Theor. XXVII.

4. 5. *In Hyperbola vel Sectionibus oppositis, si à binis punctis* A, D *agantur duæ rectæ* AG, DF *inter se parallelæ, utrivis asymptoto (si opus productæ) in* G, F, *occurrentes, & ab iisdem punctis totidem aliæ* AH, DI, *inter se quoque parallelæ, alteri asymptoto (si opus productæ) occurrentes in* H, I; *Dico* $AG \times AH = DF \times DI$.

Connexa AD, (& si opus producta) secet asymptotos in B, E; Erit ob $AB = DE$, & $BD = EA$, & ob sim. triangula

$$\left.\begin{matrix} AB \\ ED \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} BD \\ EA \end{matrix}\right\} :: AG : DF \;\&$$

$$ED : EA :: DI : AH \text{ Ergo}$$

$$AG : DF :: DI : AH$$

i.e. $AG \times AH = DF \times DI$.

6. *Coroll.* 1. Hinc si AG, DF sint asymptoto CH, & AH, DI asymptoto CG parallelæ, erunt constituta parallelogramma CGAH, CFDI æqualia. Nam parallelogramma æquiangula proportionalia sunt rectangulis è lateribus, quæ (prius) æqualia sunt.

Coroll.

Coroll. 2. Unde Rectæ BAE, KDL hyperbolam vel sectiones oppositas utcunque contingentes, ab angulo asymptotôn abscindunt triangula LCK, BCE æqualia. Nam æqualia parallelogramma IDFC, GAHC (ob KL, BE, in D & A bisectas) sunt eorum dimidia. 7.

Coroll. 3. Ob æqualia triangula ECB, LKC, & angulum ad C communem, vel æqualem; Erit 7.

1. LC : CE :: CB : CK. Et componendo vel dividendo.

$$2.\ \left\{\begin{matrix} LC \pm CE \\ LE \end{matrix}\right\} : CE :: \left\{\begin{matrix} CB \pm CK \\ BK \end{matrix}\right\} : CK$$

Coroll. 4. Si contingentes (si opus productæ) concurrant in O; addito vel dempto communi spatio CEOK, æqualia etiam erunt triangula OKB, OLE, & angulus ad O communis vel æqualis; Ideoque 7.

1. BO : OE :: LO : OK; unde comp. vel div.

$$2.\ \left\{\begin{matrix} BO \pm OE \\ BE \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} OE \\ \text{vel} \\ BO \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} LO \pm OK \\ LK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} OK \\ \text{vel} \\ LO \end{matrix}\right\}$$

Et dimidiatis antecedentibus, erit

3. BA : OE vel BO :: LD : OK vel LO.

Et dividendo

$$4.\ BA \left\{\begin{matrix} BO - BA \\ OA \end{matrix}\right\} :: LD : \left\{\begin{matrix} LO - LD \\ DO \end{matrix}\right\} \text{ \&c.}$$

Prop. XXIX. Theor. XXVIII.

Si recta LT *Hyperbolam in* T *contingens utrivis asymptoto occurrat in* L, *ab* L *vero ducatur recta* LOP, *quæ sectioni, vel sectionibus oppositis, occurrat in duobus punctis* O, P, *Et à punctis* O, T, P, *ducantur rectæ* OQ, TV, PR *asymptoto* CL *in qua est punctum* L *parallelæ, alteri asymptoto* CM (*si opus producta*) *occurrentes in* Q, V, R; *Si puncta* O, P *sint ad eandem sectionem, Rectarum* OQ, PR *summa, Sin ad oppositas, earundem differentia, æqualis erit duplæ* TV. 8. 9.

Productæ

Productæ si opus L T, L O P occurrant asymptoto V R in A, M, & ab utrovis O, P, (ex. gr. O) ducatur O B parallela V C, occurrens L C in B.

Ob triangula M P R, O L B similia, & M P = O L, erit P R = L B. Estque B C = O Q, unde C L = O Q ± P R = (ob A T = T L) 2 T V.

Coroll. 1. Hinc si per idem punctum L ducantur quotlibet L O P, erit duarum quarumvis O Q, P R ab ejusdem rectæ L O P punctis ductarum summa, vel differentia, duarum O Q, P R ab alterius cujusvis rectæ L O P punctis ductarum summæ vel differentiæ æqualis. Nempe ubique æqualis duplæ T V.

10. *Coroll.* 2. Si Recta per L sit alteri asymptôton parallela, in unico puncto O sectioni occurret; Eritque, in hoc casu, sola O Q = 2 T V. Nam O Q = C L = 2 T V. Unde in Corollario præcedenti eadem est ratio solius hujusmodi O Q, quæ duarum aliarum O Q, P R summæ, vel differentiæ.

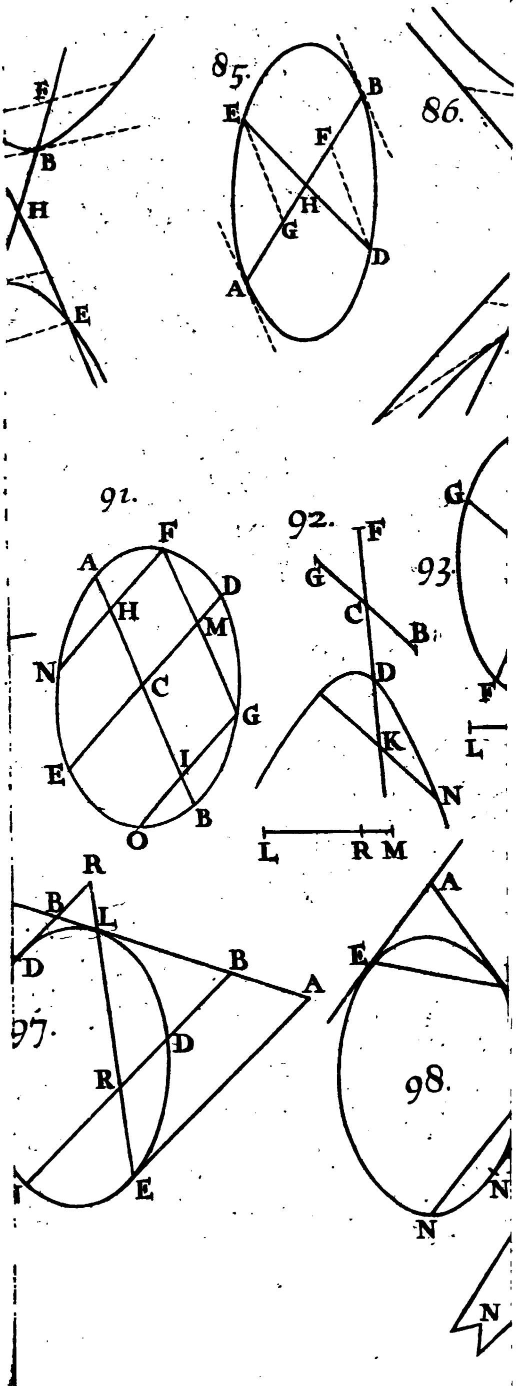
Prop. XXX. Probl. II.

11. 12. 13. 14. *Datæ rectæ lineæ*, D E, *ad sectionem quamvis conicam, vel ad sectiones oppositas utrinque in* D, E *terminatæ, diametrum invenire*; *Et centrum in Hyperbola vel opp. sect. & Ellipsi.*

Ducatur quælibet H I ipsi D E parallela, sectioni, vel sectioni oppositæ, vel sectionibus oppositis utrinque in H, I, occurrens. Bisecentur D E, H I in F, G; Erit connexa F G rectæ D E diameter, per *Coroll.* 10. prop. 20.

11. 12. Inventâ hoc modo quâlibet diametro ellipseos, vel determinatâ hyperbolæ, hæc producta occurrat sectioni vel sectionibus oppositis in A, B. Bisecetur A B in C; Erit C centrum per prop. 22. Vel inventis hoc modo duabus quibusvis diametris, Hæ (per eandem prop. 22.) in Centro se intersecant. Posteriori methodo, datâ utriusvis è sectionibus oppositis, vel Ellipseos aliquâ tantum portione, centrum invenitur.

Prop.


85.
86.
91.
92.
93.
97.
98.

11
13

11.

Prop. XXXI. Probl. III.

In omni sectione conicâ, & inter sectiones oppositas, A dato sectionis puncto D, *ad datam diametrum* A B, *ducere ordinatam* D O; *Et diametrum huic conjugatam in Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi.* 15, 16. 17. 18.

In Hyperbolâ, inter Sectiones oppositas, & in Ellipsi, Invento centro C, connexa D C & producta occurret sectioni, vel sectioni oppositæ in E; Per E ducta E F parallela A B occurret sectioni, vel sectioni oppositæ in F, vel fortè sectionem, vel sectionem oppositam in E continget tantùm. Si occurrat in F, connexa D F occurret diametro A B in O; Eritque D O ordinata quæsita. Nam D C = C E unde ob parallelas rectas erit D O = O F. Liquet ergo propositum per *Coroll.* 2. prop. 22. 15. 16. 17.

Si recta per E diametro A B parallela sit contingens, erit ipsa D E ordinata quæsita. Nam (per *Coroll.* 1. prop. 22.) erit in hoc casu recta E F parallela ordinatis ad diametrum D C E, unde (per prop. 23. & def. seq.) E C D, B C A sunt diametri conjugatæ, ideoque (per ejusdem prop. 22. *Coroll.* 2.) ad se mutuo ordinatæ. Inventâ vero quâlibet ordinatâ, recta per centrum huic parallela erit diameter huic conjugata. *Supple figuras hujus casus.*

In Parabolâ, Ductâ utcunque D A diametrum A B in A secante; in D A productâ, fiat A E = D A; Ducta vero E F ipsi A B parallela occurret sectioni in F, junctaque F D occurret A B in O, Eritque D O ordinata quæsita. Nam ob rectas parallelas, & ob D A = A E, erit D O = O F; unde liquet propositum per *Coroll.* 13. prop. 20. 18.

Prop. XXXII. Probl. IV.

In omni sectione conicâ rectam D T *ducere, quæ sectionem in dato puncto* D *contingat.* 19. 20. 21.

In

19. 20. In Hyperbola & Ellipsi, Invento centro C, ductâque diametro D C, fiat ad hanc ordinata quælibet A O; deinde per D ductâ rectâ D T parallelâ A O, Proposito satisfit. Patet per *Coroll.* 8. prop. 20.

21. In Parabola, Inventâ quâlibet diametro B C, per D agatur D E ipsi B C parallela, quæ propterea erit diameter; Ad hanc fiat quælibet ordinata A O, & per D ducatur D T ipsi A O parallela; Hæc (per idem *Coroll.* 8.) sectionem in D continget.

Prop. XXXIII. Probl. V.

22. *Datæ Hyperbolæ vel Sectionum oppositarum asymptotos invenire.*

Inventâ quâlibet diametro determinatâ C B, & centro C, ducatur utcunque F G parallela C B, unam sectionum in G secans atque huic oppositam in F [vel si non detur sectio opposita, ductâ diametro C M ipsi C B conjugatâ, secante G F in M, fiat M F = M G] Diametroque F G describatur semicirculus F P Q G; Erectâque ubicunque ad F G perpendiculari N O, æquali semidiametro C B, per O agatur P O Q ipsi F G parallela, secans circuli peripheriam in P, Q punctis; Ab his, dimissis ad diametrum F G perpendicularibus Q R, P S, Erunt junctæ C R, C S asymptoti.

Nam C B q = (ex construct.) N O q = (ob parall.) Q R q = (propter circ.) G R x R F; Unde (per *Coroll.* 4. prop. 16.) erit punctum R ad alteram asymptoton. Parique ratione erit punctum S ad alteram.

Prop. XXXIV. Probl. VI.

23. 24. *In omni sectione conicâ, Datæ diametri* A B *Parametrum invenire.*

In Hyperbolâ, recta E B D in vertice B contingens & ad asymptotos in E, D terminata, æqualis est (per def.)

secundæ diametro ipsi A B conjugatæ. In Ellipsi diameter E D diametro A B conjugata, & ad sectionem in E, D terminata, est secunda diameter. Inventâ ergo in Hyperbola & Ellipsi hujusmodi rectâ E D, fiat ipsis A B : E D tertia proportionalis L R; Hæc (per def.) erit ipsius A B parameter.

In Parabolâ, Ordinatâ ad diametrum A B quâvis rectâ G I, Ipsis A I, I G, fiat tertia proportionalis L R; Erit L R (per def.) diametri A B parameter. 25.

Def. Duæ sectiones Conicæ se mutuò *tangere* dicuntur, Si in communi puncto B eadem recta A B utramque sectionem contingat. 26.

Prop. XXXV. Theor. XXIX.

In sectionis cujusvis conicæ vel sectionum oppositarum, quatuor quibusvis punctis A, B, C, D, *concurrant quatuor rectæ infinitæ* A B, A C, B D, C D, *scilicet in unoquoque duæ; Per quintum verò quodvis sectionis vel utriusvis sect. opp. punctum* E *transeant duæ rectæ infinitæ* E N, E H, *priorum duobus quibusvis* A B, A C *in aliquo quatuor punctorum* A *concurrentibus respectivè parallelæ, quarum* E N *occurrat* A C *in* Q, D B *in* N; E H *vero occurrat* A B *in* R, C D *in* H. 27. 28. 29.

His positis; Si, manentibus punctis A, B, C, D, *punctum* E, *cum rectis* E N, E H *priorem parallelismum servantibus, per totam sectionem vel sect. opp. successivè transferri intelligatur, Erunt in omni ejusdem puncti* E *situ rectangula* E R x E H, E N x E Q *ad invicem in eadem ratione.*

Manentibus vero punctis A, B, C, & E, *punctoque* D (*hoc est rectarum* B D, C D *intersectione*) *per totam sectionem vel sect. opp. translato, Erunt in omni ejus situ partes* E H, E N *ad invicem in eadem ratione.*

Per D & utrumvis C, B, *ex. gr.* B, agantur rectæ F D G, B *n d* ipsi A C parallelæ, quarum B *d* occurrat

denuò sectioni, vel sect. opp. in d, rectæ vero E N in n, & F D G occurrat sectioni, vel sect. opp. in F, & rectæ A B in G; connexaque C d occurrat D G in S, E H in h.

Porrò recta H E R occurrat denuo sectioni, vel sect. opp. in T; ductâque rectarum A C, B d diametro M K, (bisecante scilicet A C, B d, in M, K,) bisecabit hæc tam D F, T E, ad sectionem, vel sect. opp. quàm S G, h R ad rectas A B, C d terminatas; unde S D = F G, & hT = E R; Idemque consequetur, si forte rectarum D G, E H una vel utraque sit contingens.

Ob sim. triang. & rectas parallelas, erit

$$Hh : SD :: hC : SC :: AR : AG, \text{ unde}$$

$$Hh : \left\{\begin{matrix} AR \\ EQ \end{matrix}\right\} :: SD : AG. \text{ Rursus}$$

$$\left.\begin{matrix} Bn \\ ER \end{matrix}\right\} : Nn :: DG : GB. \text{ Ergò ductis \&c.}$$

$$ER \times Hh : Nn \times EQ :: \left\{\begin{matrix} DG \times SD \\ DG \times FG \end{matrix}\right\} : GB \times AG :: \text{(per}$$

$$\text{prop. 17. \& 18.)} \left\{\begin{matrix} ER \times RT \\ ER \times Eh \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} RA \times RB \\ EQ \times En \end{matrix}\right\} \text{ Et comp. vel}$$

div. pro vario situ punctorum H, h; N, n, erit

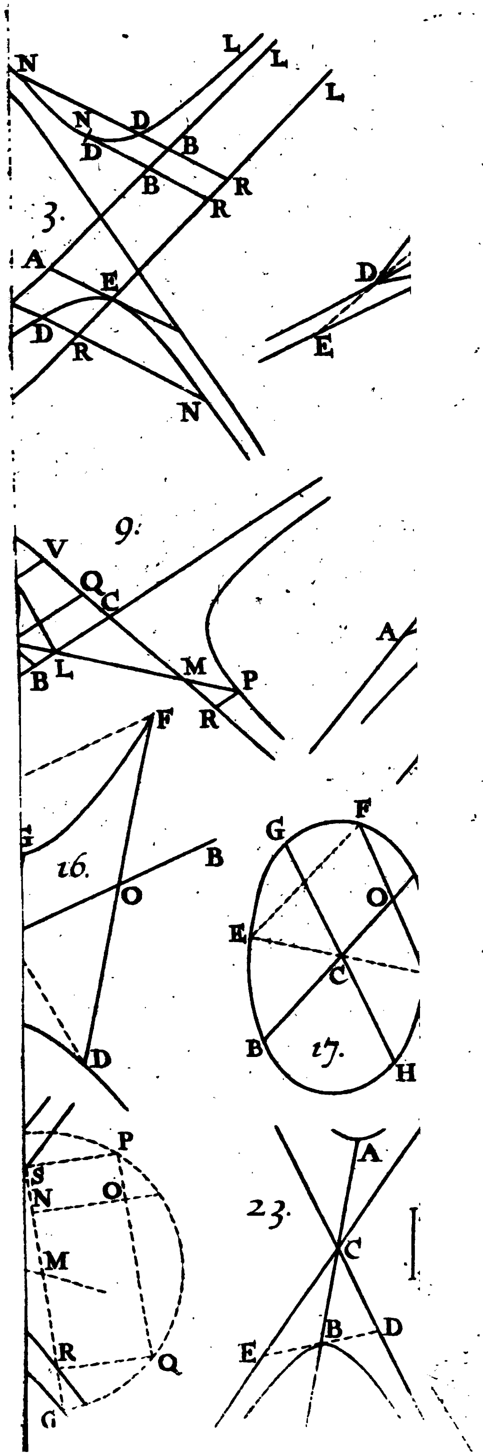
$$\left.\begin{matrix} ER \times Hh \pm ER \times Eh \\ ER \times Eh \pm ER \times Hh \\ ER \times EH \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} Nn \times EQ \pm En \times EQ \\ En \times EQ \pm Nn \times EQ \\ EQ \times EN \end{matrix}\right\} :: ER \times Eh$$

$$: EQ \times En :: \text{(priùs) } DG \times FG : GB \times AG.$$

At manentibus punctis A, B, C, D, ratio D G x F G, : G B x A G (puncto E utcunque situm mutante) manet eadem, ergo & ratio E R x E H : E Q x E N.

2. Ob E R x E H : E Q x E N :: E R x E h : E Q x E n, erit E H : E N :: E h : E n; Manentibus vero punctis A, B, C, & E, (puncti D situ utcunque mutato) manet semper ratio E h : E n, proindéque & E H : E N eadem.

30. Si punctum A puncto B vel C coincidat, hoc est, si utravis A C vel A B, *ex. gr.* A B, sit contingens, incidet punctum d in C, & dC, hoc est S d h evadet contingens, rectæque dB vel A C diameter per contingentium S d h, G A R occursum transibit, vel erit iis parallela,


3.
9.
16.
17.
23.
N L L L N D D B B R R A E D R N
D E
V Q C L B M P R
A
F G O B D
G F O E C B H
A C B D E
P S N O M R Q G

rallela, & bisecabit S G, *b* R; D F, T E, ut priùs; Eritque demonstratio omnino eadem.

Si punctum D puncto C vel B coincidat, hoc est, si D H *ex. gr.* sit contingens, Quod in alio quovis situ puncti D, ex utrâque puncti C vel B parte, obtinere ostendimus, in hoc intermedio obtinebit. *Supple fig. hujus casus.*

31. Si A, C & B, D, vel A, B & C, D simul coincidant, hoc est, si utraque A B, C D *ex. gr.* sit contingens, in tactus conjungentem coalescent A C, B D, B *d*; & coincidentibus punctis Q, N, *n*, & H, *b*, fit E Q = E N = E *n*, & E H = E *b*; Hoc est, manente utroque contactu, erit ratio E R x E H : E N q in quovis situ puncti E eadem, Et ratio E H, E N, (manente E) eadem quæ in alio quovis situ puncti D viz. E *b* : E *n*. *Supple reliquos casus.*

32. Si punctum D infinitè distet, hoc est, si B D, C D sint utrivis asymptoto hyperbolæ [vel sect. opp.] parallelæ, vel Parabolæ diametri, utraque pars propositionis etiamnum valebit; Et si punctum A infinitè distet, hoc est, si B A, C A, adeoque E N, E H sint hyperbolæ 33. asymptoto parallelæ, vel parabolæ diametri, abibunt puncta Q, R in infinitum, & coalescent rectæ E N, E H; Erit vero ratio E H : E N in quovis situ puncti D eadem. Nam quod in quibusvis ex utrâque parte, adeoque in infinite vicinis rectarum B D, C D vel B A, C A, positionibus obtinere ostendimus, in hisce intermediis (nec diversis) obtinebit.

34. *Coroll.* 1. Positis ut priùs, Si, connexâ B C secante E H in *b*, fiat E H : E *b* :: E N : E *n*, (puncto *n* sumpto ad easdem partes puncti E respectu puncti N, ad quas jacet *b* respectu H,) & connectatur B *n*, eadem sectionem in B continget. Nam accedente puncto D ad B, recta D B evadet contingens, accedetque simul punctum H ad *b*, adeoque (ob rationem E H : E N constantem) N ad *n*; hoc est, erit B *n* contingens. *pro omnibus casibus.*

35. *Coroll.* 2. Positis quæ priùs, si in rectis E N, E H sumantur puncta *n*, *b* ad easdem puncti E partes ad quas jacent N, H respectivè, ita ut sit E N : E H :: E *n* : E *b*, Connexæ B *n*, C *b* sese mutuò in ipsa sectione in- *pro omnibus casibus.*

 tersecabunt,

terfecabunt, aut faltem erunt alterutri afymptotôn hyperbolæ, aut parabolæ diametris parallelæ. Sit earum occurfus (fi modò aliquis) Δ, fitque alterutrius *ex. gr.* C *b* cum fectione occurfus (fi modò occurrat) δ, & connectatur δ B; Hæc (propter rationem E H : E N conftantem) non alibi quàm in *n* fecabit E N, ideoque non erunt puncta Δ, δ ab invicem diverfa. Sin C *b* fectioni vel fect. opp. non ampliùs occurrat, hoc eft, fi fit hyperbolæ afymptoto vel parabolæ diametris parallela, huic parallela ex B (per hanc prop.) non alibi quàm in *n* fecabit E N, hoc eft erit B *n* pariter afymptoto hyperb. vel parab. diametris parallela.

36. *Supple reliquos cafus.* *Coroll.* 3. Sint puncta quinque B, C, D, Δ, E ad fectionem conicam vel ad fectiones oppofitas; Si per E *ex. gr.* tranfeat recta E N *n*, occurrens connexis B D, B Δ in N, *n*; & alia E H *b* occurrens connexis C D, C Δ in H, *b* refpectivè, ita ut fit E H : E N : : E *b* : E *n*; agantur verò C A, B A ipfis E H, E N refpectivè parallelæ; Hæ aut fibi mutuò occurrent in ipfa fectione [vel unâ fect. opp.] vel faltem (in unam coalefcentibus rectis E N, E H) erunt uni afymptotôn hyperbolæ vel parabolæ diametris parallelæ. Sit earum occurfus, (fi modò aliquis) A, occurrat vero B A fectioni, vel fect. opp. denuò (fi modò occurrat) in *a*, connexâque C *a*, ducatur E L parallela C *a*, occurrens C D, C Δ in L, *l* refpectivè; Eritque (ex hâc prop.) E N : E *n* : : E L : E *l* : : (ex hyp.) E H : E *b*, quod fieri non poteft (propter C D, C Δ non parallelas) nifi rectæ E H, E L, hoc eft, puncta H, L; *b*, *l*, coincidant; adeoque ipfis E H, E L parallelæ rectæ C A, C *a*, hoc eft, puncta A, *a*.

37. *Supple reliquos cafus.* Si B A fit afymptoto, vel parabolæ diametris parallela, ut non ampliùs occurrat fectioni, ductis C *a*, E L eidem parallelis, oftendetur eodem modo E H, E L fibi invicem, & rectæ E N, coincidere, adeoque & C A, C *a*, hoc eft B A, C *a* effe afymptoto, vel parab. diam. parallelas.

Supple hos cafus. Si ex D, Δ unum vel utrumque infinitè diftet, vel

coincidentibus

coincidentibus C, D, vel C, Δ, B, D vel B, Δ, ex rectis connectentibus una vel duæ sint contingentes, Eadem prorsus est demonstratio.

Coroll. 4. Positis quæ in *Coroll.* 3. Cùm punctum A (modo infinitè non distet) sit semper ad sectionem; Incidente A in B, manifestum est fore A B contingentem. Idem intellige de A C, incidente A in C. *Supple hunc casum.*

Coroll. 5. Sectio conica [vel sect. opp.] sectioni conicæ [vel sect. opp.] non occurrit ad plura puncta quàm quatuor, nisi in totum congruat; Quoties autem unius hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptotos fuerit alterius asymptoto, vel parabolæ diametris parallela, aut duarum parabolarum communes fuerint diametri, id pro communi (infinitè scilicet distante) puncto censebitur, sectionum vero quilibet contactus pro duobus punctis. Nam si dixeris esse quinque communia puncta A, B, C, D, E; Connexis A B, A C; B D, C D, ductisque E N, E H (ut priùs,) sumptoque in utràvis sectione puncto quovis Δ, & connexâ B Δ secante E N in *n*, & C Δ secante E H in *b*, erit (ex hac prop.) E N : E H : : E *n* : E *b*; unde (per *coroll.* 2.) punctum Δ erit pariter ad alteram sectionem. Et sic ubique. 35. *pro omnibus casibus.*

Eadem est demonstratio in cæteris casibus, si pro infinitè distante puncto ducantur B A, C A, vel B D, C D asymptotis, vel parabolarum diametris, vel utrisque (prout casus fuerit) parallelæ; pro contactu vero concipias duorum occursuum puncta A & B, sive A & C, vel B & D, sive C & D, in unum coire in B vel C, & à communi rectâ contingente connecti, cæteraque (juxta præcedentia) fieri perinde ac si quinque essent diversa puncta. *Supple hos casus.*

Quamvis hæc demonstratio manifeste requirat, ut punctum E (ratione muneris sui) nec alii cuivis puncto coincidat, nec infinitè distet, ut non directè extendatur ad casum ubi fortè dixeris Duos esse contactus, & unum præterea occursum sed infinite distantem; Nihilominùs in hoc etiam casu valet corollarium. Nam quod

quod de duobus contactibus & occursu quantumvis longinquo ostensum est, in hujusmodi occursu infinite distante pariter obtinebit.

Coroll. 6. De duarum sectionum contactibus in corollario præcedenti ostensa de duabus hyperbolis [vel sect. oppositis] unam vel utramque asymptoton communem habentibus, pariter intelligenda sunt. Nam quemadmodum recta conjungens duo puncta (eorum uno in infinitum abeunte) evadit parabolæ diameter, vel hyperbolæ asymptoto parallela; proindeque hujusmodi rectarum parallelismus simplici occursui æquipollet, ut ex supradictis manifestum est; ita recta utramque sectionem contingens, hujusmodi tactu in infinitum abeunte, fit communis asymptotos; Et quæ de contactu quantumvis longinquo vera sunt, de communi asymptoto pariter vera erunt.

38. *Coroll.* 7. Etiam si duæ Parabolæ habeant communes diametros, & duo præterea communia puncta A, B, ad aliud punctum sibi mutuò non occurrent, nisi in totum congruant. Idem intellige de uno puncto qui sit contactus. Nam si dicas aliud esse commune punctum C, connexâ AB, ductâque huic parallelâ CE*e* secante unam sectionem in E, alteram in *e*, Si bisectâ AB in H, ducatur HI communibus diametris parallela, Erit hæc (per *coroll.* 16. prop. 20.) utriusque sectionis diameter, & bisecabit tam CE, quam C*e* in I; unde coincident E, *e*; Eruntque adeò præter communes diametros quatuor communia puncta. Simili modo (si concipias A, B concidere, & à communi rectâ contingente AB connecti, & diametrum HI per contactum duci) ostendetur in secundo casu, præter communes diametros, tria esse communia puncta quorum unum est contactus.

Si in priore casu diameter rectæ AB transit per C, erit recta per C parallela AB communis contingens, eruntque in hoc casu, præter communes diametros, tria communia puncta quorum unum est contactus. Patet ergo ubique per *coroll.* 5.

Coroll.

Coroll. 8. Parabola parabolam, cui in totum non congruit, in duobus punctis non tangit. Nam recta connectens communium rectarum contingentium occursum, & medium tactus conjungentis punctum esset communis utriusque sectionis diameter: Unde patet per *coroll.* 7.

Prop. XXXVI. Theor. XXX.

Si per quatuor puncta sectionis conicæ [vel sect. opp.] A, B, C, D *ducantur quatuor rectæ* A B, A C, B D, D C, *eodem modo quo in propositione præcedenti, Et à quovis alio sectionis puncto* E *agantur quatuor rectæ* E L, E K, E O, E M *ad priores quatuor in* L, K, O, M, *respectivè terminatæ, & ad easdem quomodocunque inclinatæ; Item ab alio quovis sectionis puncto* e, *agantur quatuor aliæ* e l, e k, e o, e m, *ad easdem rectas cum prioribus respectivè terminatæ, prioribusque respectivè parallelæ; Erunt rectangula* E L x E M, e l x e m, *sub rectis scilicet ad duas* A B, C D *in uno aliquo quatuor punctorum non conccurrentes terminatis, ad invicem, ut rectangula* E K x E O, e k x e o *sub rectis ad reliquas duas* A G, B D *terminatis.* 39. *pro omnibus casibus.*

Per E, *e* actis E Q N, *e q n*; E R H, *e r h*, duabus A B, A C, in eodem puncto A concurrentibus, respectivè parallelis; quarum E Q N, *e q n*, occurrant A C in Q, q; B D in N, *n*; E R H, *e r h* occurrant A B in R, *r*; C D in H, *h*; Erit ob sim. triang.

E R : *e r* :: E L : *e l*, &

E H : *e h* :: E M : *e m*, ductisque &c.

1. E R x E H : *e r* x *e h* :: E L x E M : *e l* x *e m*.

Rursus, E Q : *e q* :: E K : *e k*, &

E N : *e n* :: E O : *e o*, ductisque &c.

2. E Q x E *n* : *e q* x *e n* :: E K x E O : *e k* x *e o*.

Sed (per prop. præced.) est

E R x E H : *e r* x *e h* :: E Q x E N : *e q* x *e n*;

Ergo per proport. 1 & 2,

E L x E M : *e l* x *e m* :: E K x E O : *e k* x *e o*.

Si

Supple hos casus. Si rectarum quatuor puncta conjungentium una (coeuntibus duobus punctis) sit contingens, vel si duæ aliquæ sint contingentes, & duæ reliquæ in tactus conjungentem coalescant; vel è quatuor punctis unum infinitè distet; in iis nempe casibus in quibus obtinet propositionis præcedentis pars prior, unde hæc pendet, manet eadem demonstratio. Quæ etiam si rectarum E L, E K &c, *e l*, *e k* &c. aliquæ vel omnes in directum jacent, (punctorum coincidentium ratione habitâ) non proinde immutabitur.

Supple hos casus. Etiam, si in hyperbolâ [vel sect. opp.] ex quatuor punctis, uno secundum unius asymptoti directionem infinitè distante, aliud adhuc (quod priori non connexum intellige) secundum alterius asymptoti directionem infinitè distet; vel si connectens duo aliqua (coeuntibus punctis, & simul in infinitum abeuntibus) fiat asymptotos, duobus reliquis (sive coeant, sive non) finitè distantibus; Nihilominus in his, perinde ac in prioribus, casibus valebit propositio. Nam quod in horum punctorum situ quantumvis longinquo obtinet, in infinitè distante situ pariter obtinebit.

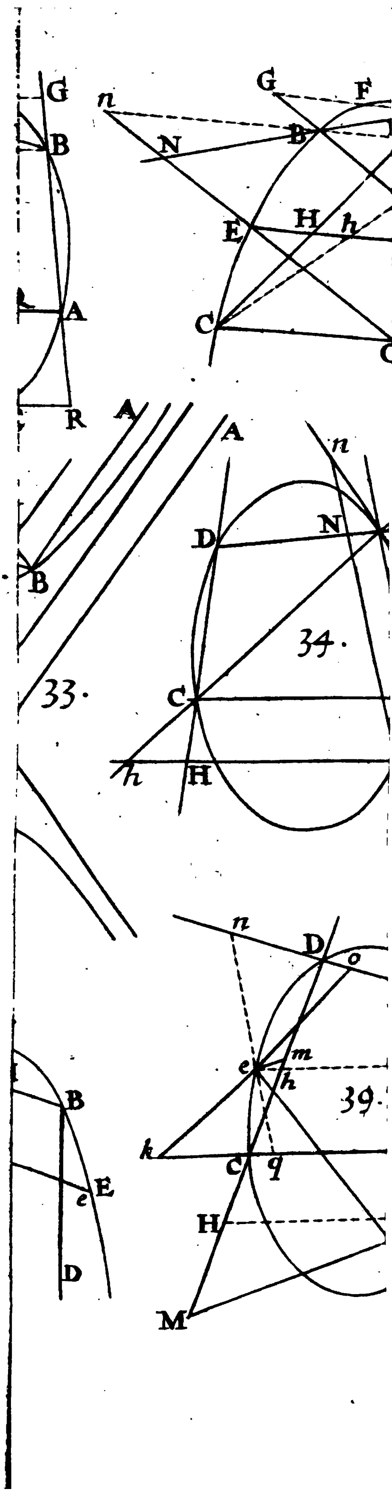
40. *pro omnibus casibus.* *Coroll.* Si quatuor rectarum duæ aliquæ in uno quatuor punctorum non concurrentes, *ex. gr.* C D, A B, concurrant in X, & reliquæ duæ C A, B D in Y, & rectæ omnes E L, E K, &c. *e l*, *e k* &c. in directum jacentes fiant una recta E *e*, quæ etiam per X, Y transeat; erit E X : *e* X :: E Y : *e* Y. Nam in hoc casu coincidunt X, L, *l*, M, *m*; uti etiam Y, K, *k*, O, *o*; Unde

$$\left\{\frac{EL \times EM}{EXq}\right\} : \left\{\frac{el \times em}{eXq}\right\} :: \left\{\frac{EK \times EO}{EYq}\right\} : \left\{\frac{ek \times eo}{eYq}\right\};$$

ideoque : E X : *e* X : : E Y : *e* Y.

41. *pro omnibus casibus.* Idem erit, si, coeuntibus punctis *ex. gr.* A, B & C, D, rectæ A B, C D fiant contingentes, & reliquæ A C, B D in tactus conjungentem coalescant, rectaque E *e* per contingentium occursum X transiens secet tactus conjungentem in Y. Siquidem in hoc quoque casu coincidunt puncta X, L, *l*, M, *m*, & Y, K, *k*, O, *o*.

PARS


33.
34.
39.

PARS II.

Definitiones.

SI Recta A D ita dividatur in B, C, ut sit tota A D ad utramvis partem extremam C D, ut reliqua extrema A B ad mediam B C, Recta A D *Harmonicè divisa* dicitur. 1.

Et Puncta A, B, C, D dicuntur *Puncta divisionis Harmonicæ*, Vel *Harmonicalia.*

Coroll. 1. Ob A D : D C :: A B : B C. Erit alternando A D : A B :: D C : B C.

Coroll. 2. Utravis extremarum A B vel C D est major mediâ B C. nam A D ⊏ C D, vel A B.

Coroll. 3. Datis divisionis harmonicæ duobus extremis punctis E, H, & mediorum uno F, invenietur alterum G. Nempe dividendo F H in G in ratione E H ad E F; Vel E F in G in ratione E H ad H F. 2.

Coroll. 4. Sint E, F, G, H puncta divisionis harmonicæ, sitque I F utriusvis extremæ partis E F excessus supra mediam F G; Propter E F : F G :: E H : G H erit divid. 3.

$$\left.\begin{matrix}EF-FG\\IF\end{matrix}\right\}:FG::\left\{\begin{matrix}EH-HG\\EG\end{matrix}\right\}:HG.$$

Coroll. 5. Unde, datis divisionis harmonicæ mediis punctis F G, & extremorum uno E, invenitur alterum H. Facta nempe E I = F G; Deinde faciendo I F : F G :: E G : G H. 3.

Coroll. 6. In casu *Coroll.* 3ⁱ. liquet duo tantùm puncta proposito satisfacere; ex utrâque scilicet parte puncti F unum; In casu *Coroll.* 5ⁱ. unicum.

Coroll. 7. Positis ut in *Coroll.* 4. Cum sit I F : F G :: E G : H G; quo minor est I F respectu F G, eo minor 3. 4. 5. 6.

erit EG respectu HG: si itaque sit $EF = FG$, hoc est, si IF nullius sit magnitudinis, erit HG infinita. Si sit EG finita, HG vero infinita, erit IF nullius magnitudinis; hoc est, erit $EF \doteq FG$. Cujus rei occurrent exempla in sequentibus.

Lemma 1.

7. *Rectâ* AD *Harmonice divisâ in* B, C, *& utrâvis extremâ parte* AB *simul cum mediâ* BC, *i. e.* AC *bisectâ in* M, *Dico*

$$MB:MC:MD \div$$

Productâ DA, fiat $Ad = CD$;

1. Ex hyp. $AB:BC::AD:DC$

2. Comp. $\left.\begin{matrix} AB+BC \\ AC \end{matrix}\right\} : BC :: \left\{\begin{matrix} AD+DC \\ Dd \end{matrix}\right\} : DC$,

Et dimidiatis antecedentibus.

3. $MC:BC::MD:DC$;

4. Divid. $\left.\begin{matrix} MC-BC \\ MB \end{matrix}\right\} : MC :: \left\{\begin{matrix} MD-DC \\ MC \end{matrix}\right\} : MD$

Lemma 2.

7. *Iisdem positis, Dico* $BC:BD::BM:BA$.

Nam ex 3. proport. suprà,

$BC:DC::MC:MD$, & per 4^{m}. proport.

$MB:MC::MC:MD$ unde

$BC:DC::MB:\left\{\begin{matrix} MC \\ MA \end{matrix}\right\}$ Et comp.

5. $BC:\left\{\begin{matrix} BC+DC \\ BD \end{matrix}\right\} :: MB:\left\{\begin{matrix} MB+MA \\ BA \end{matrix}\right.$

Lemma 3.

7. *Iisdem positis, Dico* $DC:DB::DM:DA$.

Nam ex 3. proport. supra,

$MD:MC::DC:BC$, & ex 1^{a}. proport.

$DC:BC::AD:AB$; Unde

6. $MD : MC :: AD : AB$, Et divid.

$$\left.\begin{matrix} MD - MC \\ CD \end{matrix}\right\} : MD :: \left\{\begin{matrix} AD - AB \\ BD \end{matrix}\right\} : AD;$$

7. Unde altern. $CD : BD :: MD : AD$.

Lemma 4.

Iisdem positis, Dico $DC : DB :: AM : AB$. 7.
Nam ex 5. proport.
$BD : BC :: BA : MB$. Et div.

8. $$\left.\begin{matrix} BD - BC \\ DC \end{matrix}\right\} : BD :: \left\{\begin{matrix} BA - MB \\ AM \end{matrix}\right\} : BA.$$

Lemma 5.

Iisdem positis, Dico $AD : BD :: AM : BC$. 7.
Nam ex proport. 1.
$BA : AD :: BC : DC$. & ex proport. 8.
$BA : BD :: AM : DC$. Unde
$AD : BD :: AM : BC$.

Def. In rectâ quâvis A D si per divisionis harmonicæ puncta A,B,C,D agantur quatuor rectæ A E, B E, C E, D E in puncto quovis E extra rectam A D concurrentes, vel inter se parallelæ; Eædem *Harmonicales* appellentur. 8. 9.

Coroll. Recta quævis ipsi A D parallela harmonicalibus in *a*, *b*, *c*, *d* occurrens harmonicè dividitur. Nam (ob parallelas rectas) secatur in eadem ratione quâ A D.

Lemma 6.

Iisdem positis, sit recta quævis F H *cuivis harmonicalium* E D *vel* E C *parallela, tribus reliquis occurrens in* F, G, H, *Dico* F G, *bisectam in* G. 10. 11.

Per G ductâ I K G L ipsi A D parallelâ, similia sunt triang. I K E, G K F, & I L E, G L H. Per *Coroll.* ad præced. def. $IL : LG :: IK : KG ::$ (per sim. triang.) $IE : FG :: IE : GH$. Unde $FG = GH$.

Lemma 7.

12. *Et conversim, Rectâ quâvis* F G H *bisectâ in* G, *&* *per quodvis punctum* E *extra rectam* F H *actis rectis* F E, G E, H E, *&* E D *ipsi* F H *parallelâ, Dico rectas* F E, G E, H E, D E, *esse Harmonicales.*

Per G ducatur K G L I occurrens quatuor rectis in K, G, L, I, quod fieri posse manifestum est; Erunt (ob F H || E D) similia triangula I K E, G K F, uti & I L E, G L H, unde

$$I E : G H :: I L : L G, \text{ Et}$$

$$I E : \left\{\begin{matrix} F G \\ G H \end{matrix}\right\} :: I K : K G; \text{ Ergo ex æquo}$$

$$I L : L G :: I K : K G.$$

Hoc est, puncta K, G, L, I sunt harmonicalia; & rectæ F E, G E, H E, D E harmonicales.

Lemma 8.

13. *Si quatuor harmonicales à recta quâvis utcunque secentur in punctis* K, G, L, I, *Dico rectam* K I *harmonicè dividi.*

Si rectæ harmonicales concurrant in E, sumptis duobus quibusvis alternis punctis I, G, per alterum G ducatur H G F harmonicali I E, quæ per alterum I transit, parallela, tribus reliquis occurrens in H, G, F; Erit (per lemma 6.) F G = G H, & triangula I K E, G K F, uti & I L E, G L H similia; Unde

$$I E : G H :: I L : L G, \text{ Et}$$

$$I E \left\{\begin{matrix} F G \\ G H \end{matrix}\right\} :: I K : K G; \text{ Ergo ex æquo.}$$

$$I L : L G :: I K : K G.$$

Si harmonicales sint parallelæ, res per se manifesta est.

Lemma 9.

14. 15. 16. &c. *Si duæ rectæ* A B C D, A F G H *harmonicè divisæ habeant quodlibet divisionum punctum* A *commune, cæ-*

teraque

teraque divisionum puncta rectis BF, CG, DH *ordinatim conjungantur, i. e. primum unius cum primo alterius, secundum cum secundo, tertium cum tertio; à communi scilicet puncto versus utrumvis extremum progrediendo, & per alterum extremum* (*si opus*) *redeundo; vel, quod idem est, secundum unius cum secundo alterius conjungatur, cætera pro libitu; Dico rectas* BF, CG, DH *vel coire omnes in communi puncto* E, *vel esse omnes inter se parallelas.*

Primò si earum binæ quælibet *ex. gr.* HD, CG 14. 15.
coeant in E. Juncta BE secet AFGH in I, aut (si 16. 17.
fieri potest) sit ei parallela, & connectatur AE: Si 18. 19.
BE secet AFGH in I, ob divisionem harmonicam erunt EA, EBI, ECG, EDH harmonicales, & puncta A, I, G, H harmonicalia, uti etiam ex hypothesi sunt A, F, G, H; secundo vero unius rectæ puncto cum secundo alterius connexo, puncta F, I semper cadent ad easdem partes respectu reliquorum;
Nam si punctum F sit medium (scilicet inter A, G,) 14. 15.
hoc manifestum est, cum AG angulum AEG subten- 16. 19.
dat, quam ducta EBI dividit; coincident ergo puncta I, F, cùm (per *coroll.* 6. ad def. harmon. div.) in-
ter A, G non sit aliud medium ab F diversum. Sin F 17. 18.
extremum fuerit, idem nihilominùs eveniet; non enim cadit I inter A, G medium, cum EB extra angulum AEG cadat; cumque ex punctis A, G, H duo sint media & unum extremum, non erunt (per idem *coroll.* 6.) duo adhuc extrema I, F à se invicem diversa. Coincidunt ergo I, F. *i. e.* FB transit per E.

Si EB dicatur parallela AFGH, erit AH = HG contra hypothesin.

Si duæ aliquæ conjungentium GC, HD parallelæ 20. 21.
sint, Ob similia triangula erit

CA : AD :: GA : AH & comp. vel div.

$$\left.\begin{matrix}AD \pm CA\\ CD\end{matrix}\right\} : AD :: \left\{\begin{matrix}AH \pm GA\\ GH\end{matrix}\right\} : AH ::$$ (ob div. harm.) CB : AB :: GF : FA unde triangula ABF,

A C G similia sunt, hoc est, B F, C G, D H parallelæ.

Si puncta harmonicalia aliâ lege conjungantur, Duæ saltem conjungentium concurrent inter puncta connexa, duæ vero non; Unde non erit communis omnium concursus.

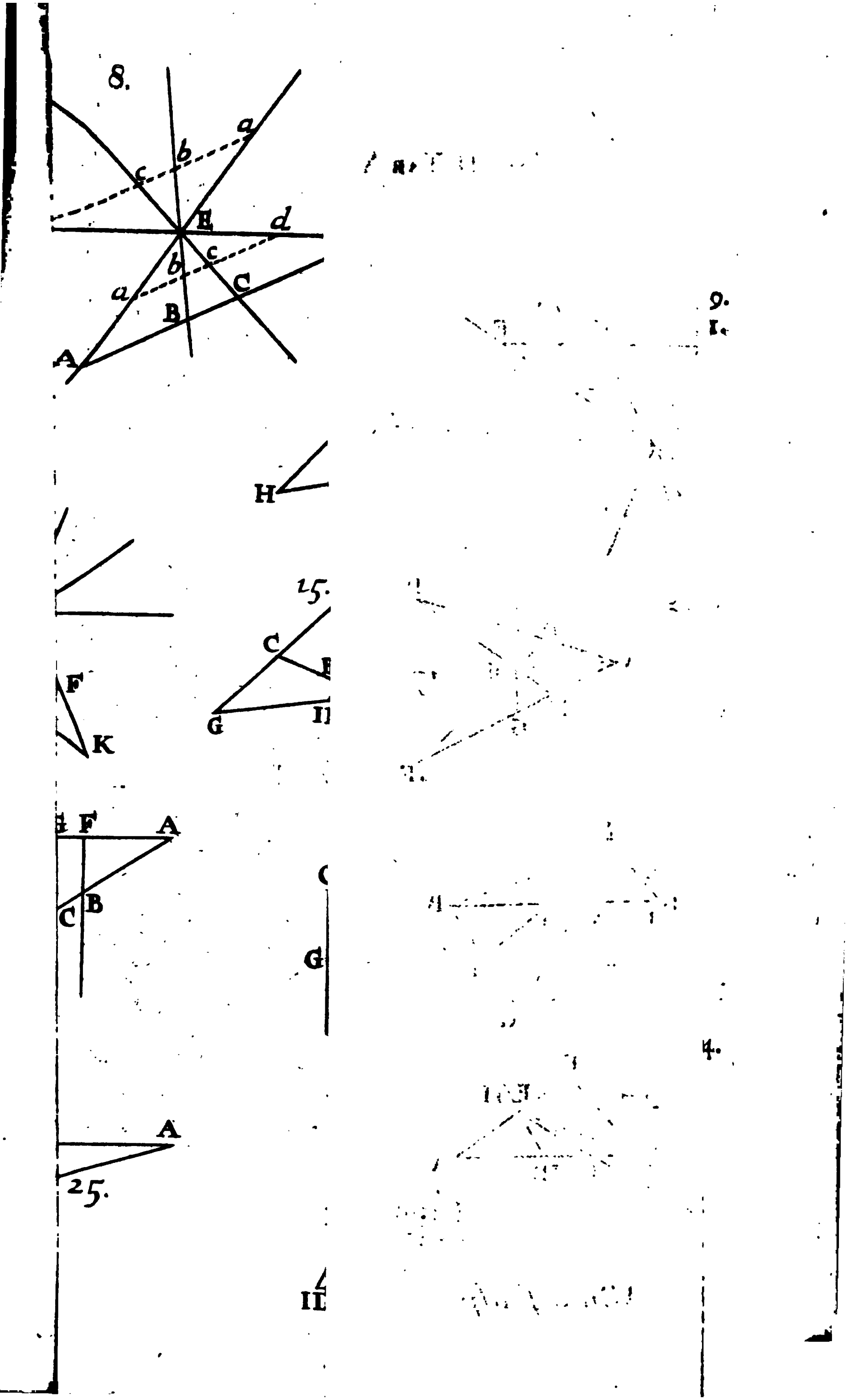
Lemma 10.

22. 23. *Si recta harmonicè divisa* A B C D, *& alia bifariam*
24. 25. *divisa* B F G, *habeant quodlibet divisionum punctum*
26. 27. *commune* B, *& duo reliqua bifariam divisæ puncta cum totidem alterius rectis* A F, C G *conjungantur, & per residuum harmonicè divisæ punctum* D *agatur* D H *ipsi* B F G *parallela*; *Ita tamen ut cum punctum* B *fuerit bifariam divisæ extremum, secundum unius cum secundo alterius conjungatur, sin* B *medium fuerit bifariam divisæ punctum, punctum* D *per quod parallela recta ducitur sit à communi* B *secundum*; *Cætera pro libitu. Dico rectas* A F, C G, D H *coire omnes in communi quodam puncto* E.

Ob rectarum, quarum puncta conjunguntur, partes unius quidem æquales, alterius inæquales, liquet A F, C G concurrere. Porro manifestum est, A F, C G non esse ipsi B F G parallelas, proindeque utramque huic parallelæ D H occurrere.

Sit ergo ipsarum A F, C G occursus E; Per E ductâ E I parallelâ B F G secante A B C D in I, Ob B F G bifariam divisam, & huic parallelam E I, (connexâ E B,) erunt E B, E A, E C, E I harmonicales, & puncta B, A, C, I harmonicalia, uti sunt ex hypothesi B, A, C, D, unde ostendetur (ut in priore lemmate) puncta D, I coincidere, hoc est, rectam D H transire per E.

Schol. Lemma hoc est (propriè) præcedentis casus particularis; nec puncta conjungendi lex hîc posita ab illâ diversa est; cùm (per *coroll.* 7. ad *def.* præced.) divisio bifariam sit divisio harmonica, cujus punctum unum,


8.
a
b
c
E
d
c
b
a
C
B
A
H
15.
C
G
F
K
F
A
B
C
A
25.
G
9.
4.

22.
24.
26.

unum, ad utramvis partem, in infinitum abit; ideoque recta ab alterius rectæ puncto aliquo ducta bifariam divisæ parallela, pro puncta conjungente habenda.

Propositio I. Theorema I.

Si sectionem quamvis conicam, vel sectiones oppositas, 28, 29.
contingant binæ rectæ A D, A G *concurrentes in* A; 30. 31.
per punctum verò concursûs A *agatur recta* A L K I, 32.
sectioni, vel utrique sectionum oppositarum occurrens in L, I, *& conjungenti tactus* D G (*in opp. sect. productæ*) *in* K; *Dico eandem harmonicè dividi à punctis* A, L, K, I; *i. e.* AL : AI :: KL : KI.

Hæc propositio est casus corollarii propositionis 36. p. 1. Ob insignem verò & frequentem ejus in sequentibus usum, visum est eam denuò propositam peculiari demonstratione munire, singulis casibus singulis figuris expressis.

Per I, L actæ E I M H, B L N F ipsi D G parallelæ occurrant contingentibus in E, H, & B, F, sectioni vero, vel sectioni oppositæ, vel utrique sectionum oppositarum in M, N; Erit (per Prop. 19. Part. 1.) MH = EI & NF = BL *i. e.* ME = HI & NB = FL. Et (per Prop. 17, vel 18. Part. 1.) erit

$$\left.\begin{matrix} LB \times NB \\ LB \times LF \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} EI \times EM \\ EI \times HI \end{matrix}\right\} :: DBq : DEq :: (\text{ob}$$

rectas parallelas) KLq : KIq. Rursus ob sim triang.

LB : EI :: AL : AI &

LF : HI :: AL : AI. Ductisque &c.

LB × LF : EI × HI :: ALq : AIq :: (priùs) KLq : KIq. Ergo AL : AI :: KL : KI.

Coroll. 1. In hyperbola & Ellipsi, Si recta contingens 33. 34.
sectionem in quolibet puncto D, cuivis diametro IL (si opus productæ) occurrat in A, & à tactu D ad eandem diametrum ordinetur recta DK; Vel si ad diametrum quamvis IL ordinetur recta DK, in cujus extremo D recta DA sectionem contingens occurrit diametro

metro in A; Eadem diameter in punctis L, K, I, A harmonicè secabitur, *i. e.* erit A L : A I : : K L : K I. Nam productâ D K donec sectioni denuò occurrat in G, Contingens in puncto G (per *Coroll.* 17. prop. 20. part. 1.) occurret contingenti A D super diametro I L in A. Unde hic casus non differt ab illo hujus propositionis.

33. 34. *Coroll.* 2. Unde (cum centrum hyperbolæ vel Ellipseos C bisecet L I) erit per Lemma 1. hujus partis.

C K : C I : C A ∸

Et per Lemma 2m. in Ellipsi per 3m. in Hyperbola.

L K : C K : : A K : I K.

Et per Lemma 2. in Hyper. per 3. in Ellipsi.

L A : C A : : K A : I A

Et per Lemma 4. in Hyper. per 5. in Ellipsi.

A L : A K : : C L : I K.

Et per Lemma 4. in Ellipsi per 5. in Hyperb.

L K : L C : : K A : I A.

35. *Coroll.* 3. Si contingens Parabolam in quolibet puncto D cuilibet diametro I L occurrat in A, & à D ordinetur ad hanc diametrum recta D K, erit A I = I K. Nam productâ K D in G, Contingentes in D, G, ut supra in *Coroll.* 1. coeunt super diametro in A, Recta verò A I K L in quovis alio situ A *i k l* sectioni occurrit in binis punctis *i*, *k*, & (per hanc prop. 1.) harmonice dividitur à punctis A, *i*, *k*, *l*; Jam rectâ A *i k l* situm A I K L obtinente, abit punctum L in infinitum, unde (per *Coroll.* 4. ad def. div. harm.) A I = I K. Hanc vero parabolæ proprietatem peculiari Theoremate mox dignabimur.

36. 37. *Coroll.* 4. In hyperbolâ vel opp. sect. si recta A I K L sit utrivis asymptoto parallela, erit A I = I K. Nam in quovis alio situ A *i k l* ex una parte, erit A *i*, in divisione harmonicâ, pars extrema, & *i k* media, i. e. A *i* ⊏ *i k*; ex altera parte erit *i k* extrema & A *i* media i. e. *i k* ⊏ A *i*; proindeque in situ A I K L erit A I = I K. Patet etiam eodem modo quo in corollario præcedenti.

Coroll.

Coroll. 5. In hyperbolâ & oppositis sectionibus, si contingentium altera *ex. gr.* A D (tactu D migrante in infinitum) degeneret in asymptoton, conjungens tactus G D fit recta eidem asymptoto parallela, idemque præstat quod tactus conjungens in casibus hujus prop. 1. & *Coroll.* 4. nimirum si A I K L occurrat sectioni, vel sectionibus oppositis, in binis punctis, erit ut in casu hujus prop. A L : A I : : K L : K I. Si vero A I K L sit alteri asymptoto C E parallela, erit ut in casu *Coroll.* 4. A I = I K. Nam quod in alio quovis situ rectæ G D ex utrâvis parte obtinet, in situ intermedio obtinebit. 38. 39. 40. 38. 39. 40.

Coroll. 6. Et ut proprietates, quantumvis specie distinctas, aliquali affinitatis vinculo conjunctas esse, & in se mutuò transire innotescat; Si in hyperbolâ, vel sect. opp. contactuum D, G uterque in infinitum abeat, contingens utraque fit asymptotos, harumque occursus A centro coincidit; punctoque K cum tactus contingente in infinitum migrante, fit (per idem *Coroll.*) L A = A I; Est vero in hoc casu L I diameter, atque inde etiam L A = A I. 41.

In Ellipsi vero vel sect. opp. Si contingentium occursus A migret in infinitum, erit (per idem *Coroll.*) L K = K I; sed & propter punctum A infinitè distans erunt D A, L A, G A invicem parallelæ, unde erit D G diameter, & L I ad hanc ordinata, atque hinc etiam L K = K I. 42. 43.

Prop. II. Theor. II.

Si parabolam, cujus diameter quælibet A K, *& ejus vertex* I, *recta* A D *ubivis in* D *contingens, eidem diametro occurrat in* A, *& à tactu* D *ordinetur ad diametrum recta* D K; *Dico* A I = I K. 44.

Per D ductâ diametro D M, ad hanc ordinetur I G O, quæ erit propterea parallela A D, & bisecta in G; Ab O ad diametrum A K ordinetur O N quæ erit ideo parallela D K, eruntque triangula K D A, N O I similia;

H Ob

Ob AD = IG erit IO = 2 AD; ideoque ob sim. triang. NI = 2 AK, & NO = 2 KD: Sed per Cor. 4. prop. 20. p. 1. NOq = 4 KDq : KDq :: NI : KI. i. e. NI = 4 KI. Ergo 4 KI = 2 AK i. e. 2 KI = AK i. e. KI = AI.

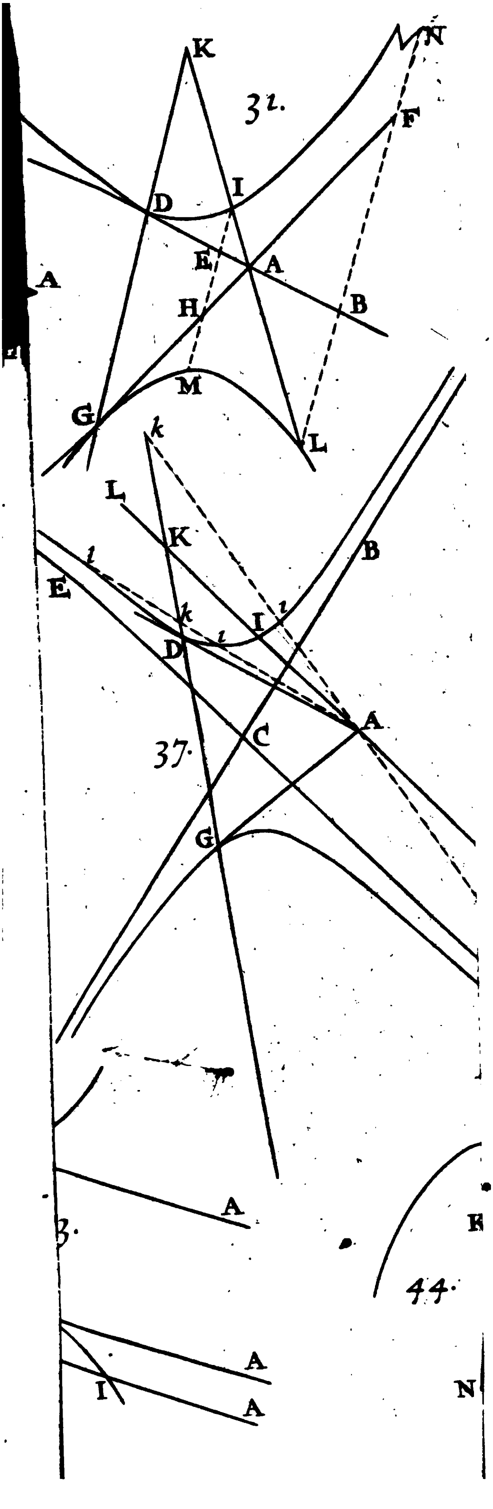
In figuris prop. 1. & Corollariorum ejus. 1, 2, 3, 4, & 5.

Coroll. ad hanc & præced. prop. Si ex eodem puncto A recta AD sectionem vel unam è sect. opp. contingat, altera ALI sectionem vel sectiones oppositas secet in duobus punctis L, I, vel in unico I si sit Hyperbolæ asymptoto parallela, vel Parabolæ diameter; Datisque tribus A, L, I inveniatur quartum divisionis harmonicæ punctum K, quod sit medium inter L & I si puncta L, I sint ad eandem sectionem, extremum verò si sint ad oppositas; Vel (si AI sit asymptoto parallela, vel parabolæ diameter) si fiat IK = AI; & connectatur KD occurrens denuò sectioni, vel sectioni opp. in G; Vel (si AD sit asymptotos,) si ducatur KG parallelà AD secans sectionem in G: Erit connexa AG contingens. Nam datis tribus A, L, I non erit aliud har. div. punctum extremum, vel inter data L, I medium, præter K; Nec aliud punctum divisionis bifariam ad partes sectionis præter K; unde ex prop. 1. & 2. satis liquet propositum.

Prop. III. Theor. III.

45. 46. 47. 48. *Si sectionem quamvis conicam, vel sectiones oppositas contingant binæ rectæ* AF, AG, *concurrentes in* A, *& per* A *ducatur* AV *tactus conjungenti* FG *parallela; Sumptoque in* AV *quolibet puncto* V, *per* V *& medium punctum* O *tactus conjungentis ducatur* VO *occurrens sectioni, vel sectionibus oppositis in binis punctis* T, L; *Dico eandem harmonicè dividi à punctis* V, T, O, L.

Connexa AL sectioni occurrat in Q, & rectæ FG in R, & ducatur QP parallela FG, eidem sectioni denuò, vel sectioni oppositæ occurrens in P; erit connexa


K
N
31.
F
D
I
E
A
A
B
H
M
G
L
k
L
K
B
E
k
I
D
C
A
37.
G
A
3.
F
44.
A
A
I
N

nexa A O diameter, bisecans Q P in S. Propter A L (per præced.) harmonicè divisam, erunt O L, O R, O Q, O A harmonicales; ergo cum sit Q S = S P, & S P parallela F G, incidet punctum P (propter lemma 6. hujus p.) in rectam V O L; *i. e.* punctum P sectioni & rectæ V O L commune est, ac proinde idem cum puncto T. Sed ob A Q R L (per præced.) harmonicè divisam, erunt parallelæ rectæ A V, Q T, R O, harmonicales, & punctum L commune est; unde recta V O harmonicè dividitur à punctis V, T, O, L.

Coroll. 1. In hyperbolâ, vel sectionibus oppositis, 49.
Si punctum V ita sumatur ut sit V O alterutri asymptotôn D C parallela, manifestum est hanc uni tan- 50.
tùm sectionum oppositarum idque in unico puncto T occurrere; unde in hoc casu (occursu L in infinitum abeunte) fit (per *Coroll.* 7. ad def. præced.) V T = T O. Patet etiam ut *coroll.* 4. prop. 1.

Coroll. 2. Et in Parabolâ, coincidentibus punctis V, 51.
A, hoc est, existente V O diametro, fit V T = T O, ut priùs ostensum.

Coroll. 3. Et in omnibus casibus, puncto V in infinitum abeunte, hoc est, ductâ V T O L ipsi V A parallelâ, coincidentibus T, F, & G, L, fit T O = L O, quod & verum est ob diametrum A O.

Prop. IV. Probl. I.

A dato extra sectionem, vel sectiones oppositas, puncto 52. 53.
A, *rectas* A D, A G *ducere, quæ sectionem vel sectio-* 54. 55.
nes oppositas contingant. Oportet autem ut punctum A *in Hyperbolâ vel sect. opp. non sit centrum.*

Per A ducantur A I L, A *i l* sectioni vel sectionibus opp. vel utrique sect. opp. &c. in I, L, *i*, *l* occurrentes, quod fieri posse manifestum est; Datisque tribus harmonicæ divisionis punctis in utrâque rectâ A, L, I; A, *l*, *i*, inveniatur in utrâque intra sectionem quartum K, *k*; Connexa K *k* occurrat sectioni, vel sectio-

nibus oppositis in D, G, erunt connexæ A D, A G contingentes quæsitæ.

Nam (per prop. 1.) conjungens tactus contingentium ex puncto A, transibit per K, *k*, proindeque non erit à D G diversa.

Supple figuras horum casuum.

Nota: Si sit A I = A L, quod inter sect. opp. quandoque fieri potest, invento *k*, ducenda est *k* D G parallela I A L; nam K infinitè distat. Si A sit in alterutrâ asymptotôn, erit D G infinita, *i. e.* asymptoto parallela, unaque tantum duci potest contingens; hoc est, contingens altera erit ipsa asymptotos.

Schol. Alias methodos (easque forte aliquando commodiores) ex prop. 1. hujus partis corollariis lector facile excogitabit.

Prop. V. Theor. IV.

56. 57. 58. 59. *In plano sectionis conicæ, vel sectionum oppositarum, ductâ quâvis rectâ* V A *quæ sectioni, vel sectionibus non occurrat, nec per centrum transeat; Inventâque diametro* A O M *rectarum in sectione, vel sectionibus ipsi* A V *parallelarum, occurrente rectæ* A V *in* A; *Dico conjungentes tactus binarum quarumcunque contingentium* V H, V I, *ex quovis puncto* V *rectæ* V A *ductarum, transire per unum idemque punctum* O *in sectione, vel in alterâ sectionum oppositarum, medium scilicet rectæ* F G *conjungentis tactus contingentium* A F, A G *à puncto* A *ductarum.*

Conjungens tactus F G (per def.) ordinata est ad diametrum A O M, proindeque parallela A V & bisecta in O; connexa V O & producta occurret sectioni, vel sectionibus opp. in T, L, vel (si sit asymptoto parallela) in unico puncto T. Si occurrat in binis punctis, eadem à punctis V, T, O, L harmonicè dividitur; aliàs à punctis V, T, O bifariam dividitur, ut patet ex prop. 3. & ejus *Coroll.* 1; at per prop. 1. & *Coroll.* 4. liquet conjungentem tactus H I contingentium V H, V I

transire

transire per O; cùm manentibus cæteris punctis non sit intra sectionem aliud punctum divisionis harmonicæ, vel divisionis bifariam, ab O diversum.

Coroll. 1. In hyperbolâ, Si punctum V in alteram asymptotôn incidat, contingentium ex V alterâ VI in asymptoton degenerante, recta per alterius VH contactum H eidem asymptoto parallela per O transibit: Nam HI vice fungitur tactus conjungentis. 60.

Coroll. 2. Si à puncto A extra sectionem, vel sectiones opp. ducantur duæ contingentes AF, AG, sitque tactus conjungens FG; similiter ex alio puncto V sint contingentes VH, VI, & tactus conjungens HI, occurrens FG in O; Junctâ AV, erit punctum O concursus omnium conjungentium tactus contingentium ex quovis puncto rectæ AV ductarum: & (per prop. 3. cum *Corollariis*) ductâ per O rectâ quâlibet occurrente utcunque rectæ AV, & sectioni vel sect. opp. in binis punctis, eadem harmonicè dividitur; vel bifariam dividitur tantùm, si sit alteri asymptotôn hyperbolæ parallela, vel sit parabolæ diameter. 56. 57. &c.

Prop. VI. Theor. V.

Sumpto intra sectionem conicam, vel unam sectionum oppositarum quolibet puncto O, *quod in Ellipsi non sit centrum, inventâque diametro quæ per* O *transit; per* O *ad hanc ordinetur* FOG, *sectioni in* F, G *occurrens, in cujus extremis sectionem contingant* FA, GA, *diametro* AO *occurrentes in* A, *& per* A *agatur* AV *ipsi* FG *parallela; Dico rectas* HK, IK *contingentes in occursibus rectæ cujusvis* HOI *per punctum* O *ductæ, & sectioni, vel sect. opp. in* H, I *occurrentis, convenire in punctum aliquod rectæ* AV, *aut esse eidem parallelas.* 56. 57. 58. 59.

Si contingentes HK, IK concurrant in K, agatur KO, quæ producta occurrat sectioni vel sectionibus in L, T, (quod semper fiet nisi KO sit alteri asympto-

tôn

tôn hyperbolæ parallela) & rectæ A V in V; Erit (propter diametrum) O medium punctum rectæ F G, unde recta L O T K V (per prop. 1.) harmonicè dividitur à punctis L, O, T, K, & (per prop. 3.) à punctis L, O, T, V, ergo coincidunt puncta K, V. Si L O T K V sit asymptoto parallela bifariam dividitur à punctis O, T, V, & à punctis O, T, K, unde in hoc etiam casu coincident K, V.

2. Si H O I diametro A O coincidat (in Ellipsi scilicet vel sect. opp.) manifestum est fore H K, I K ipsi A V parallelas.

60. *Coroll.* Cum eadem sit ratio rectæ per tactum asymptoto parallelæ, atque tactus conjungentis; Si recta H O I ducta sit alteri asymptotôn parallela, Liquet tangentem in occursu ejus cum sectione H K, per ejusdem asymptoti occursum cum rectâ A V transire.

Prop. VII. Theor. VI.

61. 62. *In omni Sectione Conicâ, vel sectionibus oppositis, ductâ*
63. 64. *quâvis rectâ* F G *quæ sectioni vel sectionibus opposi-*
Supple casus omissos. *tis in binis punctis* F, G *occurrat (vel forte unico in hyperbolâ vel sectionibus oppositis) nec per centrum transeat; Dico conjungentes tactus* H, I *binarum quarumcunque contingentium* B H, B I, *à quovis puncto* B *rectæ* F G *extra sectionem vel sectiones sumpto, ad sectionem vel sectiones ductarum, transire per unum idemque punctum* A *extra sectionem, vel sectiones; punctum scilicet, in quod coeunt contingentes sectionem, vel sectiones, in punctis* F, G; *vel in quod tangens in horum punctorum altero convenit cum asymptoto, quoties* F G *ducta est asymptoto parallela.*
Supple hunc casum. *Quòd si punctum* B *in alteram asymptotôn incidat, recta per contactum unicæ contingentis à puncto* B *ductæ eidem asymptoto parallela, per idem punctum* A *transibit.*

A puncto B ducatur B K L M sectioni, vel sectionibus oppositis pro libitu in K, M occurrens, & rectæ

H I si opus productæ in L, dicaturque rectarum F G, H I occursus R, & jungantur K R, M R, quarum M R si opus producta occurat eidem, vel oppositæ sectioni in N; erunt (propter B K L M harmonicè divisam) rectæ B R, K R, L R, M R harmonicales: Ducta B N (si opus producta) occurrat L R (si opus productæ) in P, K R (si opus productæ) in Q, & sectioni in O; hæc (per prop. 1. hujus p.) harmonicè dividitur in B, N, P, O, & propter harmonicales (per lemma 8.) in B, N, P, Q, coincidunt ergo puncta O, Q; sive occursus rectarum B N, K R in ipsam sectionem incidit.

Ductis igitur K S N, M T O secantibus F G in S, T, hæ (per lemma 9.) convenient super rectâ I H (si opus productâ) in punctum aliquod D; (nam si dicantur K N, H I, M O parallelæ, erit (per lemma 6.) K S = S N & O T = T M, unde F G transibit per centrum contra hypothesin.) Sed ob harmonicales L R D, N R M, B F S R T G, K R O, rectæ D N S K, D O T M harmonicè dividuntur à punctis D,N,S,K; D,O,T,M; unde (per prop. 4.) junctæ D F, D G sectionem vel sectiones oppositas contingent; vel saltem continget altera, erit altera asymptotos; *i.e.* non erunt ab A F, A G diversæ. Transit ergo I H per A.

Si M R sit asymptoto parallela, ducendæ sunt K N, B N huic parallelæ. Si G F, H I sint parallelæ (quod in sect. opp. fieri potest) ducendæ sunt M R, K R his parallelæ. Si recta quævis sit cuivis harmonicalium parallela, non harmonicè, sed bifariam secabitur. Eademque quæ priùs consequentur, adhibitis (pro re natâ) lemmate 6, vel 10. & *coroll.* 4, vel 5. prop. 1.

Prop. VIII. Theor. VII.

Sumpto extra sectionem conicam vel sectiones oppositas 61. 62.
quolibet puncto A *quod non sit centrum; Dico binas* 63. 64.
quascunque H B, I B *contingentes sectionem vel sectiones oppositas in duobus occursibus rectæ cujusvis* A H I *per punctum* A *ductæ, convenire in punctum aliquod*

aliquod B *rectæ* F G *conjungentis tactas rectarum* A F, A G *sectionem vel sectiones contingentium à puncto* A *ductarum*; *vel in punctum aliquod* B *rectæ quæ per contactum unicæ contingentis à puncto* A *ductæ alteri asymptotôn parallela ducitur, quoties punctum* A *in eâdem asymptoto sumptum est.*

Quòd si recta A H I *sit alteri asymptotôn parallela, contingens in unico ejus occursu cum sectione per ejusdem asymptoti occursum cum rectâ* B F G *transibit.*

Contingentes in H, I, coeant in B; ex A ductis contingentibus A F, A G, conjungens tactus F G, si opus producta (per prop. præced.) transibit per B. Et sic (mutatis mutandis) in omnibus casibus.

Nota. Si I H sit diameter Ellipseos vel sect. opp. punctum B infinite distabit, hoc est, erunt I B, H B, G F B parallelæ.

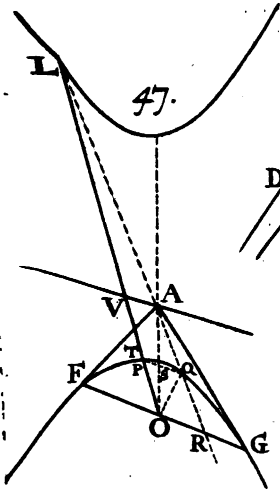
Prop. IX. Theor. VIII.

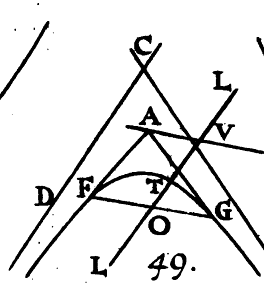
65. 66. 67. 68. *Supple casus omissos.* *Si sectionem conicam vel sectiones oppositas contingant duæ rectæ* A F, A G *concurrentes in* A; *sumptoque in tactus conjungente* F G *puncto* B, *ducantur totidem aliæ sectionem vel sectiones contingentes* B H, B I, *prioribus contingentibus in* K, L, *&* E, D *occurrentes*: *Dico has quatuor contingentes à mutuis occursibus, propriisque contactibus harmonicè dividi*; *scilicet à punctis* A, K, F, E; A, L, G, D; B, K, H, L; B, E, I, D; *vel bifariam dividi tantum quando occursuum vel contactuum aliquis abit in infinitum.*

Asymptoti contingentibus, hisque parallelæ per tactus, tactus conjungentibus, (ut in prioribus) accensentur.

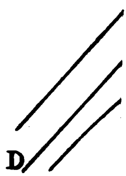
Conjungens tactus H I (per prop. 7.) transit per A; Et propter B G, A I harmonicè divisas à B, F, O, G; A, H, O, I punctis, aut saltem bifariam divisas, Erunt A B, A F, A O, A G, item B A, B H, B O, B I harmonicales; Unde liquet propositum.

Coroll.

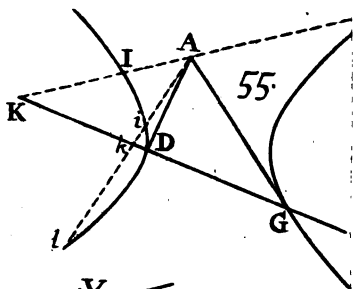

L
47.
A
V
F
T
P
S
Q
O
R
G

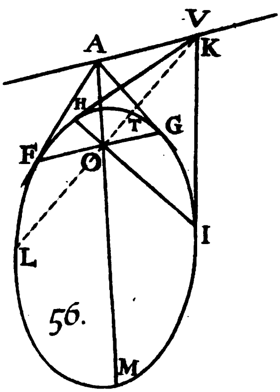

C
L
A
V
D
F
T
G
O
L
49.

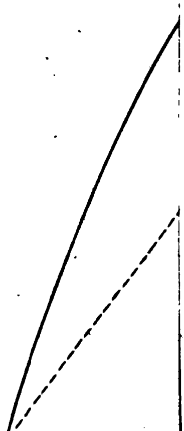

PA


D


l
k


I
A
55.
K
i
D
k
G
l


V
A
K
H
T
G
F
O
I
L
56.
M


L
MB

Coroll. Si tres tantùm sint contingentes AF, AG, 65. 66.
BH, quarum quælibet BH conjungenti tactus reliqua- 67. 68.
rum occurrit in B, ipsis vero contingentibus in K, L. *Supple casus omissos.*
Dico hanc harmonicè dividi à punctis B, K, H, L, vel bifariam tantùm si &c. Ducta AH & producta occurrat sectioni, vel sectioni oppositæ in I; Contingentes in H & I coibunt (per prop. 8.) in aliquod punctum rectæ FG, quod erit punctum B, in quod BH, FG prius coibant; Redit itaque casus in illum hujus prop. 9. Et sic in reliquis contingentibus, & in omnibus casibus.

Schol. In parallelis contingentibus BH, AG in El- 67.
lipsi & opp. sect. transit casus hujus corollarii in illum *coroll.* Prop. 27. partis 1.

Prop. X. Theor. IX.

In Ellipsi, & sectionibus oppositis, si à terminis cu- 69. 70.
jusvis diametri AB *ducantur contingentes* AK, BI, *cuivis aliæ contingenti* TD *occurrentes in* K, I; *Dico* $AK \times BI$ *æquale esse quartæ parti figuræ diametri* AB, *i. e.* (*si sit centrum* C *& parameter sive latus rectum* lr) $CA \times \frac{1}{2} lr = AK \times BI$.

Contingens TD occurrat diametro in D, à contactu T ordinetur ad diametrum recta TO, & à centro C agatur ad contingentem TD recta CR rectis AK, BI parallela: Erit per *Coroll.* 2. prop. 1.

$$1.\ CD : CA : CO \div\ \text{id est,}$$
$$CD : CO :: CAq : COq.$$

Et dividendo

$$2. \left\{\begin{matrix} CO - CD \\ \text{vel } CD - CO \\ DO \end{matrix}\right\} : CD :: \left\{\begin{matrix} COq - CAq \\ \text{vel } CAq - COq \\ BO \times OA \end{matrix}\right\} : CAq;$$

Et per *Coroll.* 5. Prop. 24. Part. 1.

$$BO \times OA : OTq :: BA : lr :: \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} BA \\ CA \end{matrix}\right\} : \left\{\tfrac{1}{2} lr\right.$$

 :: CA

$:: CAq : \left\{ \begin{matrix} CA \times \frac{1}{2} lr \\ \frac{1}{4} \text{fig. diam. } AB \end{matrix} \right\}$ vel altern.

3. $BO \times OA : CAq :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB:

Ergo (per Proport. 2, & 3.)

4. $DO : CD :: OTq : \frac{1}{4}$ figuræ diam. AB.

Per *Coroll.* 2. prop. 1.

$DA : DO :: DC : DB$, ideoque ob sim. triang.

5. $AK : OT :: CR : BI$, i. e. $OT \times CR = AK \times BI$.

Rursus ob sim. triang.

6. $OT : CR :: DO : DC :: OTq : \left\{ \begin{matrix} OT \times CR \\ AK \times BI \end{matrix} \right\}$

Ergo per proport. 4. & 6.

$OTq : \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB :: OTq : AK \times BI$: unde $\frac{1}{4}$ fig. diam. $AB = AK \times BI$.

Si in Ellipsi contingens KTI sit diametro AB parallela; Sit CN semidiameter huic conjugata, & coincident puncta T, R, N, fietque $AK = CN = BI$, adeoque $AK \times BI = CNq =$ (per *coroll.* 4. prop. 24. p. 1.) $\frac{1}{4}$ fig. diam. AB.

69. 70. *Coroll.* 1. Positâ CN semidiametro ipsi AB conjugatâ, erit ubique $AK \times BI = \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB =$ (per jam dictum *coroll.*) CNq.

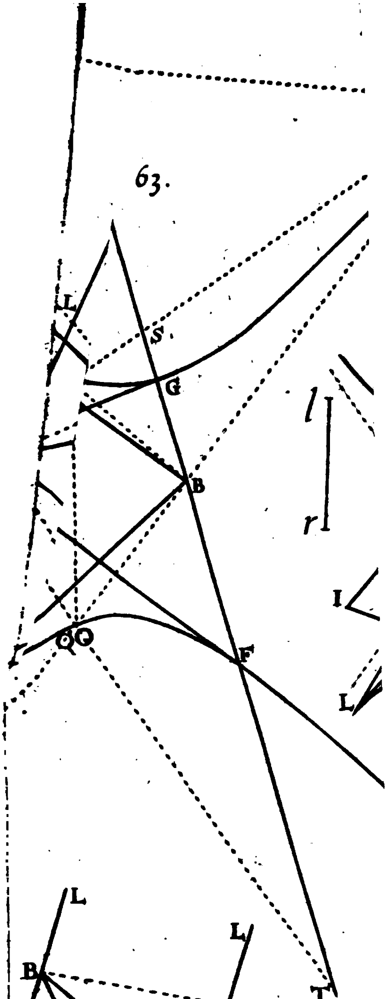
69. 70. *Coroll.* 2. Et si ductâ diametro TCL, contingens in L occurrat IB productæ in M, erit $MB \times BI = \frac{1}{4}$ fig. diam. $AB = CNq$. Nam (ob parallelas AK, MBI, & KTI, LM; & æquales TC, CL & BC, CA,) æquiangulæ & æquales erunt figuræ $CAKT$, $CBML$; Unde $MB = AK$, & $MB \times BI = AK \times BI = CNq$.

Prop. XI. Theor. X.

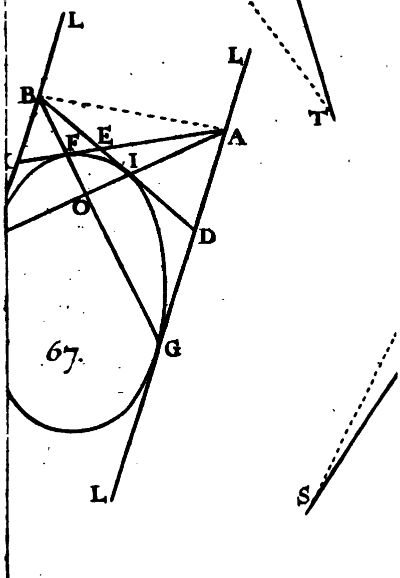
71. 72. *Sint Ellipseos, vel Hyperbolæ, aut sectionum oppositarum, duæ quævis semidiametri conjugatæ* AC, CN, *quævis aliæ pariter conjugatæ* TC, CX, *ductisque* AV, NV; TS, XS, *compleantur parallelogramma* $ACNV$, $TCXS$; *Dico hæc esse inter se æqualia.*

Producta

63.



67.



6

6

7

Producta AC sectioni vel sect. opp. occurrat in B, ductaque BI parallela CN occurrat TS in I, ipsa vero TS occurrat AV in K & AB (si opus productae) in D; à centro C ducatur CQ occurrens TS in Q, ut sit ang. DAK vel $DCN = DQC$, agaturque huic parallela XY occurrens TS in Y, & à T ordinetur ad diametrum AB recta TO: Erunt rectae TS, AK, BI contingentes, & triangula DAK, DOT, DQC, DBI, similia.

Per sim. triang. & *Coroll.* 2. prop. 1.

$ID : TD :: BD : OD :: CD : AD$, ideoque div. vel comp.

$$ID : \left\{ \begin{matrix} ID \pm TD \\ IT \end{matrix} \right\} :: CD : \left\{ \begin{matrix} CD \pm AD \\ CA \end{matrix} \right\} \text{ \& }$$

altern.

1. $IT : CA :: ID : CD ::$ (ob sim. triang.) $BI : CQ$.

Rursus per sim. triang. & *coroll.* 2. prop. 1.

$KD : TD :: AD : OD :: CD : BD$, ideoque

$$KD : \left\{ \begin{matrix} TD - KD \\ TK \end{matrix} \right\} :: CD : \left\{ \begin{matrix} BD - CD \\ CB \end{matrix} \right\} \text{ \& }$$

altern.

2. $TK : CB :: KD : CD ::$ (ob sim. tri.) $AK : CQ$.

Per proport. 1, & 2. ductis &c. & per *coroll.* 1. & 2. prop. praeced.

$$\left\{ \begin{matrix} IT \times TK \\ CXq \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} CA \times CB \\ CAq \end{matrix} \right\} :: \left\{ \begin{matrix} BI \times AK \\ CNq \end{matrix} \right\} : CQq$$

Unde $CX : CA :: CN : CQ$; & $CX \times CQ = CA \times CN$. Sunt autem parallelogramma ACNV, CXYQ (ob ang. $DAK = DQC$) aequiangula, proindeque ad invicem ut rectangula ex lateribus, viz. $CA \times CN$, $CX \times CQ$, hoc est aequalia; sed parallelogrammum TCXS (propter communem basim & altitudinem aequalem) est parallelogrammo CXYQ, adeoque ipsi ACNV, aequale

Coroll. Hinc parallelogramma circa ipsas diametros sunt aequalia, utpote horum quadrupla.

Scholium. In sectionibus opp. vel hyperbolâ, haec propositio nullo negotio patet ex *coroll.* 2. prop. 28. p. 1.

71. Nam ſi tangentes in A, T occurrant aſymptotis in V, F; S, E, erit (per def.) ſemidiameter CN = AV = AF, & CX = TS = TE, & CN || AV, CX || ST; ideoque parallelogr. ACNV = triang. CVF = triang. CSE = parallelogr. TCXS. Sed cùm præcedens demonſtratio (utpote generaliori proprietati innixa) ad haſce ſectiones cum Ellipſi ſe juxtà extenderet, congruum erat & ipſas pariter eâdem complecti.

PARS

PARS III.

Propositio I. Theorema I.

Circulus sectioni conicæ, quæ ipsa non sit circulus, vel sectionibus oppositis, ad quatuor plurima puncta A, B, C, D *occurrit*; *Ad tria* A, B, C, *quorum unum* A, 1. 2.
Ad duo tantùm A, B, *quorum utrumque est contactus.* 3.

NAM si sectio [vel sect. opp.] circulo congrueret, esset circulus contra hypothesin; Patet ergò per *Coroll.* 5. prop. 35. p. 1.

Def. In omni sectione conicâ, vel sectionibus oppositis, diametri quibus ordinatæ suæ ad rectos angulos insistunt, ut A B, C D, *Axes* appellantur. 4. 5. 6.

Prop. II. Probl. I.

In Hyperbolâ vel sect. opp. & in Ellipsi quæ non sit circulus, Axes invenire; *Et duos tantum esse axes ostendere.* 7. 8.

Inventâ quâvis diametro A B, quæ in hyperbolâ vel sect. opp. sit determinata, Diametro A B (*i. e.* centro C, intervallo C A, vel C B) describatur circulus A M B G; Hujus peripheria vel sectionem aut sect. opp. in A, & B, continget, (quo in casu per prop. præced. ei non ampliùs occurret;) vel iterum occurret sectioni, vel sectionibus opp. in binis punctis M, G.

Si contingat in A & B, erunt ipsa A B atque huic conjugata, Axes quæsiti. Nam contingentes circulum H A I, K B R in hoc casu contingent etiam sectionem vel sect. opp. estque propter circulum angulus B A I, vel

vel B A H rectus, & diametri A B conjugata erit parallela A I, suntque diametri conjugatæ ad se mutuò ordinatæ, proindeque hæ diametri sibi mutuò ad angulos rectos insistent.

Si A, B non sint contactus; Ex punctorum A, B utrovis A ad punctorum M, G utrumvis M agatur A M; Bisectâ A M in N, & per centrum C ductâ C N, erunt diameter C N atque huic conjugata Axes quæsiti.

Prior casus jam satis liquet. In secundo probandum primò est circuli peripheriam sectioni, vel sectionibus oppositis in M, G occurrere, deinde angulum C N A esse rectum.

Sectionem vel sect. opp. in A, B tangant D A E, F B T, hæ (per *Coroll.* 8. prop. 20. part. 1.) erunt parallelæ; cúmque occursus A, B non sint tactus, erunt hæ à contingentibus circulum K B R, H A I, diversæ; Unde contingens sectionem B F transibit intra circulum, & contingens circulum H A transibit intra sectionem, hoc est, semicirculus B M A ad partes B est extra sectionem, vel utramque sectionum opp. ad partes vero A est intra sectionem, vel unam sectionum opp. unde necessariò occurret ei alicubi in M. Pari ratione alter semicirculus occurrit sectioni ex alterâ parte, vel sectionum opp. alteri in G.

Connexâ C M, erunt (propter circulum) C A, C M æquales, estque (ex construct.) M N = N A, unde Ang. C N A est rectus, & (per *cor.* 2. prop. 22. part 1.) L C N O est rectæ M N A diameter, Estque huic conjugata rectæ M N A parallela, suntque conjugatæ diametri ad se mutuò ordinatæ, proindeque in nostro casu sibi mutuò ad angulos rectos insistunt.

9. 10. 2. Si jam, præter diametros O C L atque huic conjugatam Y C X hâc methodo inventas, alia quævis T C V dicatur Axis; à quovis puncto sectionis vel utriusvis sectionum opp. A, ad T C V, & ad unum ex axibus primò inventis O C L, sint ordinatæ A S R, A N M, & ducantur diametri A C B, R C Q, M C P; Ob A S = S R, & ang. A S C (ex hypoth.) rectum, erit A C = C R;

Pari

Pari modo erit $AC = CM = CP = CB =$ (prius) $CR = CQ$; Unde (ob has rectas æquales) circulus centro C transire potest per sex puncta sectionis, vel sect. opp. P, Q, B, A, R, M, contra prop. præced. Unde diameter TV non erit axis, neque huic conjugata.

Coroll. 1. In Ellipsi, conjugati axes transversi LCO, XCY sunt inæquales. Aliàs, connexâ LY & bisectâ in D, ductâque diametro BCDE, esset (ob $LC = CY$) angulus LDC rectus, cujus contrarium jam ostendimus. 11.

Coroll. 2. In Hyperbolâ Axis transversus OCL est minima omnium determinatarum diametrorum, & huic propiores sunt remotioribus minores. Nam si TV dicatur minor quam LO, semicirculus diametro LO secabit TV in Z alicubi intra unam sectionum opp. & eidem sectioni occurret denuò in A; unde diameter BCP quæ bisecat junctam OA in P, (propter $CA = CO$, & $OP = PA$) erit axis, contra jam probata. Pari prorsus modo ostendetur TCV esse remotiore quâvis diametro minorem. 12.

Coroll. 3. In Ellipsi axis major est omnium diametrorum maxima, minor vero minima: & minori propiores sunt remotioribus minores; majori, majores. Nam si TV dicatur minor quam YX; Semicirculus diametro YX secabit TV extra sectionem in Z, secabit vero axem majorem (propter $CO \sqsubset CX$) alicubi intra sectionem in F; occurret itaque sectioni alicubi in A; unde ostendetur ut in præcedenti *Corollario* diametrum BCP quæ connexam XA in P bisecat, esse axem, ab ipsis OL, YX diversum, contra jam ostensa. Eodem modo ostendetur majorem axem OL esse quâvis aliâ diametro TV majorem, & majori propiores remotioribus majores esse, minori minores. 13.

Coroll. 4. In hyperbolâ vel opp. sect. & Ellipsi, Diametri MCG, ACB ductæ ab extremis ordinatæ cujusvis MA ad utrumvis axem LO sunt æquales; Idem intellige de contingentibus ME, AE in punctis M, A, super 14. 15. 16.

per

per axi (per *Coroll.* 17. prop. 20. p. 1.) in puncto aliquo E coeuntibus. Patet ob MN = NA, ob communes EN, NC, & angulos ad N rectos.

14. 15. 16. *Coroll.* 5. In iisdem sectionibus, Recta EC bifariam dividens angulum vel à binis æqualibus contingentibus, vel binis æqualibus diametris factum, erit Axis. Nam bisecabit MA, eidemque ad angulos rectos insistet. In hyperbolâ vel opp. sect. rectæ, quæ bifariam dividunt utrumque angulum asymptotôn, sunt Axes conjugati.

14. *Coroll.* 6. Et quarum diametrorum angulum utervis axis bifariam dividit, eædem sunt æquales. Nam in Ellipsi *ex. gr.* Si dicas CQ (⊐ vel ⊏ CM) = CA: Junctâ AQ secante axem in P, & Sectionem in R; ob æquales angulos QCP, ACP, & CA = CQ, erit AP = PQ, & angulus ad P rectus; unde APR est ad axem ordinata, hoc est AP = PR = (priùs) PQ, quod absurdum est. Et eodem modo (ductâ hujusmodi APQR) in hyperbolâ vel sect. opp. hoc *Corollarium* demonstrabitur.

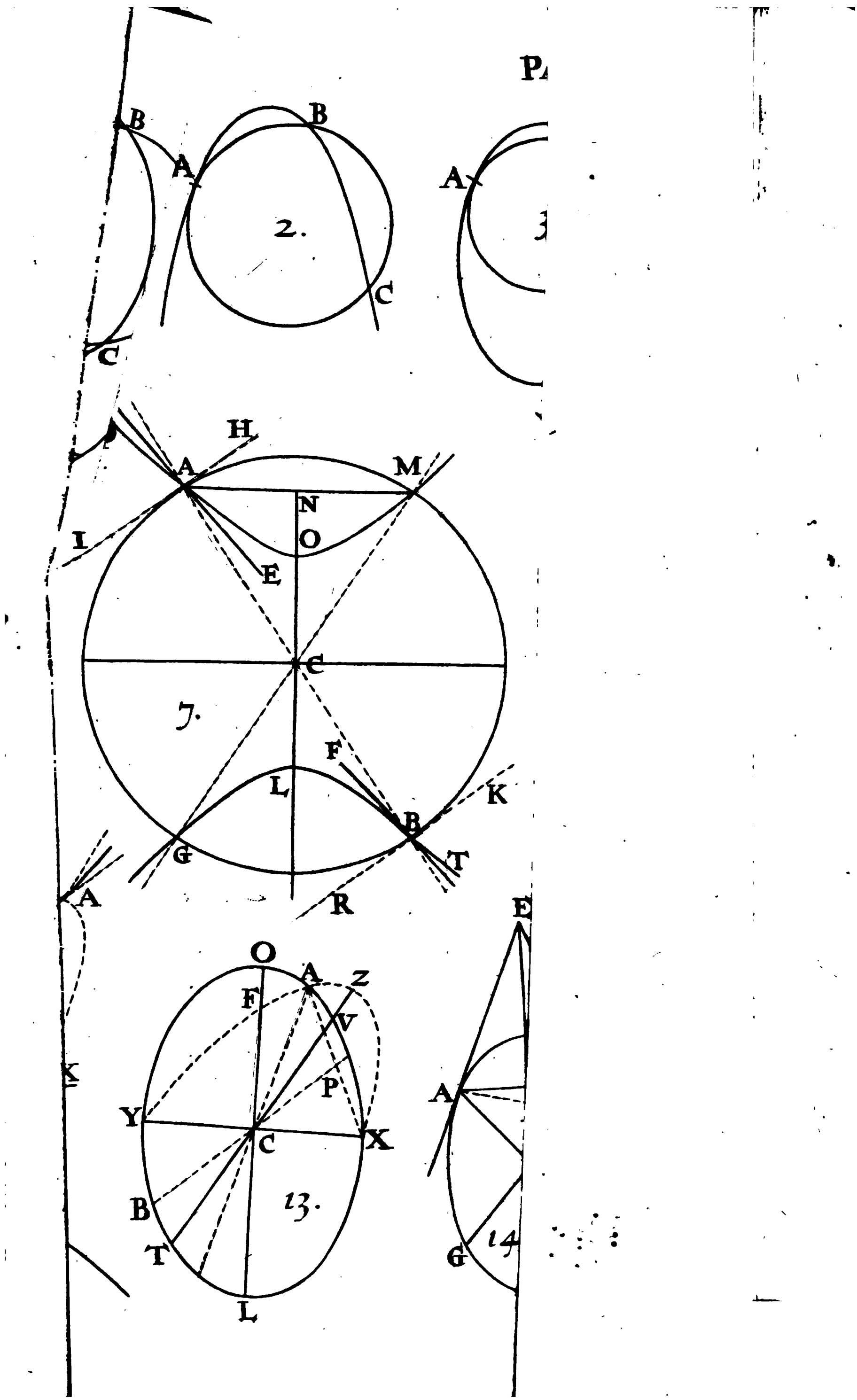
14. 15. 16. *Coroll.* 7. Quæ diametri MCG, ACB æqualiter ab utrovis axe distant, æquales faciunt angulos ad contingentes in earum verticibus CME, CAE. Nam triangula CME, CAE similia & æqualia sunt.

Coroll. 8. Ex *Coroll.* 2, & 3. Liquet Circulum super axi determinato Hyperbolæ vel sectionum oppositarum, tanquam diametro, descriptum, totum esse extra utramque sectionem: Super Ellipseos axi majore, sectionem intra se continere: Super Ellipseos axe minori, à sectione contineri.

Prop. III. Probl. II.

17. *Invenire Axem Parabolæ: Et unicum ejus esse axem ostendere.*

Inventâ quâlibet diametro CD, sumptoque in eâdem ubivis puncto D, erigatur ad eandem perpendicularis EDF occurrens sectioni in E, F; Bisectâ EF in B,



PA
B
A
C
2.
B
C
A
H
A
M
N
O
I
E
C
7.
F
L
K
B
G
T
R
A
K
O
A
z
F
V
P
Y
C
X
B
T
13.
L
E
A
G
14

ductâque B A parallelâ C D, Erit BA axis quæsitus. Nam (per *Coroll.* 16. Prop. 20. p. 1.) B A est rectæ E F diameter, & (ob rectas parallelas) erit angulus A B F rectus.

Si punctum D bisecet E F, ipsa diameter C D primò inventa est axis.

2. Si dicas alium esse axem C D ab A B diversum: Ordinatâ ad hunc F D E secante axem primò inventum in B; Ob parallelismum diametrorum erit E F ad utrumque axem C D, A B perpendicularis, hoc est, ad utrumque ordinata, ideoque tam in B quam in D bisecta, quod absurdum est.

Coroll. 1. Contingentes M E, A E in extremis rectæ cujusvis M A ad axem ordinatæ sunt æquales. 18.

Coroll. 2. Recta bifariam dividens angulum ab æqualibus contingentibus factum est axis. Patet utrumque sicut in hyperbolâ vel sect. opp.

Coroll. 3. Diametri M G, A B æqualiter ab axe distantes æquales faciunt angulos ad contingentes in earum verticibus, viz. G M E, B A E. Patet ob similia & æqualia triangula E M N, E A N, & angulos G M N, B A N rectos.

Coroll. 4. Angulus E M G, quem quævis diameter facit cum contingente in ejus vertice versus axem, obtusus est, utpote recto G M N major: Et quo diameter M G ab axe remotior est, eo hujusmodi angulus major est; Nam contingens *e m* in vertice propioris diametri *m g* producta occurret E M & E O extra sectionem in P, *e*; ductâque *m n* parallelâ M N, erit ang. P *e* N = ang. P E N + E P *e*, unde P *e* N ⊏ P E N, & *e m n* ⊐ E M N, additisque utrinque rectis, *e m g* ⊏ E M G.

Prop. IV. Theor. II.

In Ellipsi diametri I C H, K C G *rectarum* A E, A D *utriusque axis extrema conjungentium sunt conjugatæ, & æquales; & præter ipsas non sunt aliæ diametri conjugatæ æquales.* 19.

19. Junctis E B, D B, ob CD = CE & C A = CB & angulos ad centrum rectos, erit A E B D figura parallelogramma cujus latera æqualia; unde diametri, I H, K G bisecant etiam E B, D B, ac propterea erunt rectis E A, A D respectivè parallelæ; Hoc est, erunt diametri I H, K G conjugatæ: Erit porro A F C N (ob A F ∥ C N & A F = A N, utpote æqualium A D, A E dimidia) figura parallelogramma cujus latera æqualia; Unde axis A C B bifariam dividet ang. F C N; sunt ergo (per *Coroll.* 6. Prop. 2.) diametri K G, I H æquales.

20. 2. Stantibus quæ in priore figurâ, Sit A B axis major, E D minor, & O P, Q R duæ quævis diametri conjugatæ, ab ipsis H I, G K & ab axibus diversæ; Harum una Q R dividat *ex. gr.* angulum D C K, & in R contingat T R L: Hæc (per *Coroll*, 6. Prop. 23. p. 1.) occurret diametris I H, G K productis in L, T, proindeque huic parallela O P cadet extra angulum H C K; pari vero ratione eadem O P cadet extra angulum D C B, hoc est intra angulum A C D; unde dividet necessariò angulum A C H; Est itaque (per *Cor.* 3. prop. 2.) O P $\sqsupset$ H I, & H I = G K $\sqsupset$ Q R, hoc est, O P $\sqsupset$ Q R; ideoque O P, Q R inæquales.

20. *Coroll.* 1. In Ellipsi majoris diametri transversæ minor erit secunda huic conjugata, minoris major. Nam referant jam G K, H I duas quascunque diametros conjugatas, sive æquales, sive inæquales, O P, Q R alias quascunque pariter conjugatas; sintque axes A B major, E D minor, ut priùs: Et si Q R dividat *ex.gr.* an-angulum D C K, ostendetur (ut priùs) O P dividere angulum A C H; unde (per *coroll.* 3 prop. 2.) erit O P $\sqsupset$ H I & G K $\sqsupset$ Q R. Contrarium accidit in hyperbolâ, vel sect. opp. ut suo loco ostendemus.

Coroll. 2. Hinc si duæ contingentes Ellipsim Q M, G M concurrant in M, contingens Q M in vertice minoris diametri Q R major erit quàm contingens G M in vertice majoris diametri G K. Nam Q M, G M, sunt diametrorum Q R, G K conjugatis O P, H I respectivè parallelæ; Estque (per prop. 17, vel 18. p. 1.)

QMq

$QMq : MGq :: OC \times CP = OCq : HC \times CI = HCq$; Estque (per *coroll.* præced.) $OP \sqsubset HI$, hoc est $OC \sqsubset HC$; unde $QM \sqsubset GM$.

Schol. Cum in Hyperbolâ (non æquilaterâ) semidiameter transversa CB semidiametro secundæ CD, hoc est semicontingenti BL, sit ubique inæqualis; Vertice vero B in infinitum abeunte & coincidentibus punctis L, C, rectæ CB, BL asymptoto & sibi invicem coincidant, hoc est, tum demum fiant æquales: Respondebunt aliquatenus Hyperbolæ asymptoti Ellipseos diametris conjugatis æqualibus; sed cum hoc discrimine, quod Ellipseos diametri sint altera alterius, utravis vero asymptotos sit quasi sui ipsius conjugata. *Vide fig. 90. partis primæ.*

In Hyperbolâ æquilaterâ diametri conjugatæ sunt ubique æquales; uti etiam in Ellipsi, si Ellipsis sit circulus; Nam quod circulus est inter ellipses, id hyperbola æquilatera (quoad proprietates saltem nonnullas) inter hyperbolas.

Prop. V. Probl. III.

In Hyperbolâ, & inter sectiones opp. & in Ellipsi, invenire diametros quæ cum suis ordinatis angulum faciunt dato cuivis angulo non recto Q, *vel ejus complemento ad duos rectos, æqualem; qui tamen in Ellipsi non sit major eo quem faciunt rectæ* BD, AD *ab utroque extremo axis majoris ad utrumvis extremum minoris ductæ, nec minor eo quem faciunt rectæ ab utroque extremo axis minoris ad utrumvis extremum majoris ductæ.* 21. 22.

Super utrovis axe Ellipseos, vel determinato hyperbolæ, vel sect. opp. AB, tanquam chordâ, statuatur arcus circuli AEB capiens angulum dato angulo Q vel ipsius complemento æqualem, qui (si opus) post AB continuetur; occurret hic Sectioni, vel utrique Sectionum oppositarum (præter A, B) in duobus punctis F, R; sumpto horum utrovis F, connectantur AF,

 BF,

B F, quibus bifariam divisis in L, O, ductisque diametris H L C M, N O C P; Hæ duæ diametri, totidemque aliæ eodem modo ope puncti R reperiendæ, proposito satisfacient.

21. In Ellipsi sit (exempli gratiâ) A B axis major, Sectionem contingat I A, in A; circulum contingat recta G A; Erit (propter axem) ang. I A B rectus; cumque arcus A E B (ex hypoth.) non sit anguli recti capax, contingens G A cum rectâ B A faciet ex unâ parte angulum acutum, transibitque ideo ex eâdem parte intra sectionem, hoc est, arcus ipse transibit intra sectionem: Rursum arcus super chordâ A B capiens angulum æqualem A D B, transibit per D; ergo arcus qui (ex hypoth.) capit angulum minorem quàm A D B secabit axem minorem extra Sectionem in E; Est ergo idem arcus ad partes A intra Sectionem, ad partes vero E extra eandem; secabit ergo illam alicubi in F inter A, E; Pari ratione secabit eandem in R inter E, B. Idemque erit (mutatis mutandis) in axe minori.

22. In Hyperbolâ vel sect. opp. contingat I A unam è sectionibus oppositis, & A G circulum: Ob angulum B A I rectum & B A G obliquum, non coincident I A, A G, sed angulum efficient; unde recta quævis angulum I A G dividens, transibit tam intra circulum quàm sectionem, hoc est, circuli circumferentia ad puncta A, B (nam utriusque eadem est ratio) transit intra sectiones, quæ (cum in se revolvatur) utrique necessariò occurret denuò in F, R.

21. 22. Jam in utrâque figurâ, propter F L = L A & B C = C A, erit C L parallela B F & A F parallela C O; unde ang. C L A = C O B = B F A = dato Q, vel ejus complemento. Idemque erit de diametris ope puncti R repertis.

Coroll. 1. In hyperbolâ vel opp. sect. manifestum est angulum Q sumi posse dato cuivis obtuso vel acuto æqualem; Angulumque quem determinata aliqua diameter facit cum suis ordinatis, vel cum contingente in ejus vertice, eo obliquiorem esse quo magis eadem diameter

meter ab axe determinato distat; & pariter in diametro huic conjugatâ. In Ellipsi hujusmodi angulus ab utrovis axe ad utramvis diametrorum conjugatarum æqualium fit semper obliquior, atque inde ad alterum axem continuò ad rectum vergit. Nam in hyperbolâ vel sect. opp. angulus B F A = C L A, quo punctum F ab A remotius est, eo continuò minor est, donec abeunte puncto F in infinitum, dato quovis angulo minor fiat. In Ellipsi quò punctum F ab A remotius est, eo angulus B F A major est; donec, coincidente puncto F ipsi D, fit C L una diametrorum æqualium; atque inde ad B fit idem angulus continuò minor, donec, coincidentibus punctis F, B, recta A F, hoc est jam A B, fit ad axem minorem ordinata. Quâ in re, ulteriorem æqualium Ellipseos diametrorum cum Hyperbolæ vel sect. opp. asymptotis analogiam observare licet.

Coroll. 2. In Ellipsi, liquet angulum C L A vel C O B à semiaxe majore subtensum esse obtusum; Nam huic æqualis B F A insistit arcui B A semicirculo majori: In hyperbolâ liquet angulum C L A vel C O B esse acutum, nam huic æqualis B F A insistit arcui A E B semicirculo minori. Idem intellige de angulis quos ad easdem partes hæ diametri faciunt cum contingentibus in earum verticibus; sunt enim hæ contingentes ordinatis parallelæ.

Prop. VI. Probl. IV.

Idem in Parabola præstare.

Inventâ quâlibet diametro K B L, per punctum ejus intra sectionem B ad hanc inclinentur duæ rectæ A B I C, D B G E in angulis K B E, L B C dato Q æqualibus, occurrentes sectioni in A, C; D, E; Bisecentur A C, D E in I, G; per I, G agantur diametri H I, F G. Propter diametrorum parallelismum erunt anguli H I B, F G E æquales dato Q; unde proposito satisfit. 23.

Coroll.

Coroll. Manifestum est (per *Coroll.* 3, & 4. prop. 3.) diametros F G, H I ab axe M N æqualiter utrinque distare; & propterea quod hujusmodi rectæ A B C, D B E in quocunque angulo ad diametrum K B inclinatæ semper utrinque sectioni occurrant, angulum Q, sicut in hyperbolâ, vel sect. opp. cujusvis magnitudinis sumi posse.

Prop. VII. Theor. III.

24. *In Hyperbolâ secunda diameter axi conjugata, vel quod idem est, contingens in ejus vertice* E B D *asymptotis terminata, minor est quàm contingens in vertice cujuslibet alterius diametri ut* H F G; *& quo quælibet diameter est axi propior, eo ejusmodi contingens minor est, major quo remotior.*

Per tactum F & utrumvis rectæ G H extremum *ex. gr.* H, agantur F N L, H I K parallelæ E B D, secantes axim in N, I, & asymptoton C G in L, K, & connectatur L I. Ob G F = F H, erit H K = 2 F L; & ob E B = B D, erit I H = I K, hoc est I H = F L; unde (ob parallelas rectas) erit I L = F H: Et (si A B dicatur axis) ob angulum I N L rectum, erit I L $\sqsubset$ L N, *i. e.* F H $\sqsubset$ L N; unde multo magis F H $\sqsubset$ D B, *i. e.* G H $\sqsubset$ E D.

2. Si A B non sit axis sed alia quælibet diameter, & M F quælibet diameter ab axe remotior quam A B; erit angulus quem faciunt rectæ A B, E D ad partes axi contrarias obtusus, cum (per *Coroll.* 2. prop. 5.) ad partes axis sit acutus; hoc est, erit angulus A B E, ideoque & huic æqualis L N I obtusus; ergo in hoc quoque casu L I $\sqsubset$ L N; cæteraque consequentur ut in casu priore, unde patet propositum.

Coroll. 1. Hinc (contra quàm in Ellipsi) majoris diametri transversæ major est secunda huic conjugata, minoris minor. Nam quo magis diameter hyperbolæ ab axe distat eo major est, ut in *Cor.* 2. Prop. 2. ostensum est.

Coroll.

Coroll. 2. Positis ut prius, sit contingentium H F G, E B D concursus O, erit F O $\sqsubset$ B O. Nam (per Prop. 16. p. 1.) G F q : E B q :: O F q : O B q; unde (ob G F $\sqsubset$ E B) erit O F $\sqsubset$ O B. Idem erit in Sectiones oppositas contingentibus.

Lemma.

In figuris A B C D, *sit* B C = C D, *& ang.* A C D *ob-* 25. 26.
tusus, i. e. *ang.* A C B *acutus*, *Dico* A D $\sqsubset$ A B.

Ab A in D B (si opus productam) cadat perpendicularis A E, ob ang. acutum cadet hæc ad puncti C partes B, ideoque D E $\sqsubset$ B E; Estque

$$A\,Dq = A\,E\,q + D\,E\,q$$
$$A\,B\,q = A\,E\,q + B\,E\,q \sqsupset A\,E\,q + D\,E\,q$$

unde A D $\sqsubset$ A B.

Prop. VIII. Theor. IV.

Parabolam in punctis B, D *contingant* B A, D A *concur-* 27. 28.
rentes in A, *tactusque* B *vel axis* L M N *vertici coincidat*, *vel sit eidem axi tactu* D *propior*, i. e. *ordinata ad axem* B M *sit minor quam* D N; *Dico* D A $\sqsubset$ B A.

Connexâ D B & bisectâ in C, erit juncta A C (per Prop. 20. p. 1.) ejusdem diameter, & parallela M N; Si B sit axis vertex, vel si B, D sint ex eadem parte axis, manifestum est A C non coincidere axi; Idem liquet si sint ex axis partibus diversis propter B M $\sqsupset$ D N & C B = C D: Producta si opus D B occurret axi in O, eritque ang. L O D *i. e.* A C D obtusus, Unde per Lemma præcedens liquet propositum.

Prop. IX. Theor. V.

In omni Sectione Conicâ, ad axem A H I, *qui sit de-* 29. 30.
terminatus Hyperbolæ, sed utervis Ellipseos, ordine- 31.
tur recta C H B, *occurrens Sectioni in* C, B; *In punctis vero* C, B *Sectionem contingant* C A, B A *super*

axi

axi concurrentes in A, *vel in Ellipsi forte axi parallelæ; describaturque circulus* CEBI *qui rectam* CA (i. e. *sectionem*) *in* C *contingat, transeatque per punctum* B: *Dico eandem rectam* BA, *vel* (*quod perinde est*) *sectionem, in* B *contingere; & præter puncta* B, C, *totum esse intra sectionem, si in Ellipsi* AHI *fuerit axis major; Sin* AHI *fuerit Ellipseos axis minor, præter eadem puncta* C, B, *totum esse extra sectionem.*

29. 30. In omnibus casibus occurrat axis sectioni in D, circulo in E; Si concurrant CA, BA, propter axem erit
31. (per *Coroll.* 4. Prop. 2. & *Coroll.* 1. Prop. 3.) AB $=$ AC, unde AB (ex Elementis) circulum continget in B, id est (ex def.) circulus sectionem continget. Per D & E agantur FD, GE parallelæ BC, utrivis contingenti BA occurrentes in F G: Cùm sit axis AH ad BC perpendicularis, erit sectionis & circuli communis diameter, ideoque (per *Coroll.* 8. Prop. 20. p. 1.) FD sectionem, GE circulum continget, eritque (per *Coroll.* 3. Prop. 4. vel *Coroll.* 2. Prop. 7. vel per Prop. 8.) BF $\sqsubset$ FD, vel si AH sit Ellipseos axis minor FD $\sqsubset$ BF; Si sit BF $\sqsubset$ FD, cum sit propter circulum BG $=$ GE, erit necessariò BG $\sqsupset$ BF; nam si BG dicatur $\sqsubset$ vel $=$ BF, cadet GE ad rectæ FD partes A, vel eidem coincidet, hoc est erit GE $\sqsupset$ vel $=$ FD, adeoque (ob BF $\sqsubset$ FD) erit BG $\sqsubset$ GE contra circuli naturam. Est ergo BF $\sqsubset$ BG *i. e.* (ob rectas parallelas) HD $\sqsubset$ HE, hoc est, punctum E cadet intra sectionem. Pari ratione occursus alter axis cum circulo I erit intra ellipsin: Nam in hyperbola & parabola per se manifestum est.

31. Si AHI sit axis minor ellipseos, erit BF $\sqsupset$ FD; unde haud absimili modo ostendetur puncta E, I cadere extra sectionem. Propter duos contactus B, C, circulus (per Prop. 1.) sectioni non amplius occurrit: ergo in priori casu (*viz.* cum E, I sint intra sectionem) circulus totus erit intra sectionem; in posteriori (ubi hæc puncta sunt extra sectionem) totus erit extra sectionem.

Si

Si in Ellipsi A B, A C parallelæ sunt, erit B C axis; unde (ex *Coroll.* 8. Prop. 2.) patet propositum.

Coroll. In figuris 29, 30. Liquet Circulum C E B I maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in puncto C tangentium; In fig. 31. Circulum C E B I minimum esse omnium Ellipsi circumscriptibilium & eandem in puncto C tangentium: Nam (fig. 29, 30.) ejusmodi major quivis secabit B C extra sectionem; In fig. 31. minor quivis secabit B C intra sectionem. 29, 30. 30, 31.

Prop. X. Theor. VI.

Iisdem positis, rectisque C A, B A *concurrentibus, si per* B *agatur diameter* B M K, *& ad hanc à puncto* C *ordinetur recta* C V R, *occurrens sectioni denuò in* R; *describatur verò circulus rectam* C A (i. e. *sectionem*) *in puncto* C *contingens, transiensque per punctum* R; *Dico hunc circulum præter tactum* C *in unico hoc puncto* R *sectioni occurrere, Hoc est, ex unâ parte rectæ* C R *totum esse extra sectionem, ex alterâ intra sectionem.* 32, 33. *Supple figuras hyperb. & parab.*

In Hyperbolâ, Parabolâ, & Ellipsi cujus axis major sit A H, Circulus rectam C A in C contingens & per punctum quodvis N sectionis à B diversum transiens, major erit circulo (in priore prop.) per B transeunte, (nam circulus per B totus intra sectionem cadit,) & secabit rectam C B productam extra sectionem in S; hoc est, circulus C N S ad partes B erit extra sectionem. 32.

Ex N ordinatâ ad diametrum B M K rectâ N T O, occurret circulus sectioni denuo in O: Nam producta O N occurrat A C in L; & propter O N L || A B, erit (per Prop. 17, & 18. p. 1.) C L q : L N x L O :: C A q : A B q *i. e.* (ob C A q = A B q) erit C L q = L N x L O, unde cùm punctum N sit ad circulum, erit & O; & cum C sit contactus, circulus C N S O (per Prop. 1.) nisi in C, N, O sectioni non occurret; hoc est, cum S sit extra sectionem, arcus N O erit extra sectio-

 nem,

nem, arcus verò CN, CO intra ſectionem: Nam ſi dicatur circulus ex utrâque parte N, vel O, eſſe extra ſectionem, ex tribus occurſibus C, N, O ſaltem duo erunt contactus, quod (per Prop. 1.) fieri nequit; eſtque (ob punctum R extra circulum CNO) circulus CR major circulo CNO.

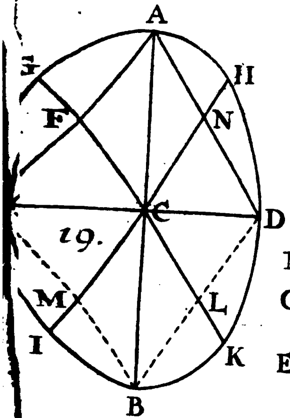
Augente ſe circulo CNO, & accedente puncto N ad C, accedet ſimul O ad R, & coincidentibus tandem N, C, coincident ſimul O, R; & evaneſcente arcu CN, totus arcus CSO, *i.e.* jam CR erit extra ſectionem; vel circulus ad rectæ CR partes B, eſt extra ſectionem.

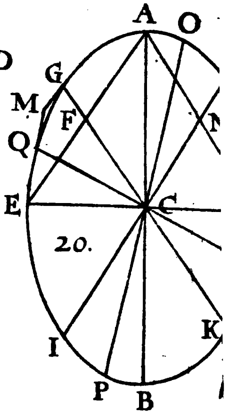
33. Porro ex alterâ parte rectæ CR, ſumpto in ſectione puncto N, quod in Ellipſi non ſit punctum K, ductâque LNO, ut prius; circulus in C contingens & per N tranſiens oſtendetur (ut prius) tranſire per O; circulus vero CNO niſi in C,N,O ſectioni non occurrit; & in Hyperbolâ & Parabolâ (quæ ex hac parte infinitæ ſunt) manifeſtum eſt arcum NO eſſe intra ſectionem.

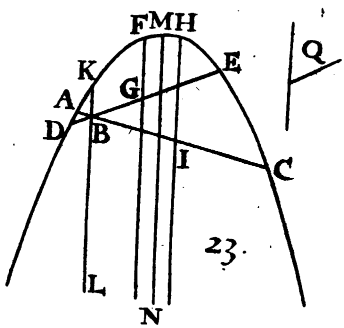
33. In Ellipſi vero ductâ contingente KP, erit hæc parallela AB; unde (ob ABq : ACq : : KPq : PCq & AB = AC) erit KP = PC, unde punctum P (per *Coroll.* 5. Prop. 2.) eſt ad axem minorem, & CK erit ad eundem axem ordinata, circuluſque contingens in C & per K tranſiens (per Prop. præced.) erit totus extra ſectionem, hoc eſt comprehendet punctum N vel O; unde (ob tactum C) circulus CNO minor erit circulo per K, & ſecabit rectam CK intra ſectionem in S, hoc eſt, arcus NSO erit intra ſectionem.

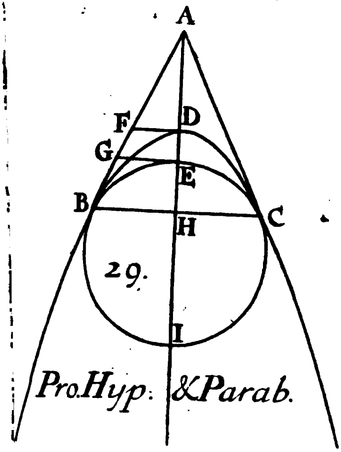
33. In omnibus igitur ſectionibus arcus NO eſt intra ſectionem: Erunt vero in omnibus, arcus CN, CO extra ſectionem; nam ſi dicatur circulus ex utrâque parte puncti N vel O eſſe intra ſectionem, è tribus occurſibus duo ſaltem erunt contactus, quod abſurdum eſt; Comprehendit inſuper circulus CNO punctum R, proindeque eſt (ob tactum C) circulo CR major.

Minuente ſe circulo CNO, & accedente puncto N ad C, accedet ſimul O ad R, & coincidentibus N, C, coincident ſimul O, R; & evaneſcente arcu NC, totus arcus

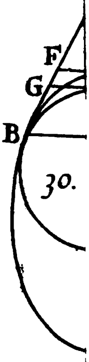








Pro.Hyp: &Parab.



35.

arcus C S O, hoc est, jam arcus C R erit intra sectionem; vel circulus ad rectæ C R partes K (*i. e.* ipsi B contrarias) est intra sectionem. Liquet ergo propositum.

Coroll. 1. Hinc; Quàmvis circulus Sectioni Conicæ occurrens, & ex utrâque occursûs parte ad easdem sectionis partes cadens, in eodem occursu sectionem necessariò contingat; Non tamen circulus sectionem conicam contingens necessariò ex utrâque contactûs parte ad easdem ejus partes cadit.

Coroll. 2. Cum omnis circulus sectionem in C contingens, & per punctum quodvis sectionis ex unâ parte rectæ C R (quantumvis puncto R propinquum) transiens minor sit circulo C R, & ex utrâque parte contactûs intra sectionem reperiatur, hoc est, magis incurvetur quàm sectio in puncto C; Circulus verò illam in eodem puncto contingens & per punctum quodvis sectionis ex alterâ ejusdem rectæ parte transiens sit major circulo C R, & ex utrâque contactûs parte cadat extra sectionem, hoc est, minùs incurvetur quàm sectio in eodem puncto C; Sectionem in hoc puncto C circulo C R æquicurvam esse, meritò existimare licet. 32. 33.

Schol. Si axis A H in Ellipsi ponatur minor, eadem erit demonstratio sed inversa; *viz.* pro *major*, legendo *minor*, pro *intra*, *extra*; & vice versâ.

Prop. XI. Theor. VII.

Iisdem positis; per C *ducatur diameter* CL, *quæ (si opus producta) occurrat circulo* C R *in* Q; *Dico* C Q *æqualem esse rectæ* D F *quæ est parameter diametri* C L. 34. 35. *Supple figuras parab. & hyperb.*

In omnibus sectionibus, sit Circulus C N O idem qui in figuris præcedentibus, secans C Q in X; à puncto N (*viz.* punctorum N, O rectæ A C propinquiore) ad diam. C L ordinetur N P I S, occurrens scilicet diametro C L in I, & circulo denuò in S; & à puncto C erigatur ad C A perpendicularis C P, secans N S in P; Erit hæc circuli diameter, & ob C A || N S) bisecabit

NS in P. Si punctum I non sit primo intra circulum CNO; Augente vel minuente se circulo CNO prout puncta N, O fuerint ad has vel illas partes rectæ CR, cùm, accedente N ad C, & O ad R, accedat continuò I ad C, & X ad Q, transibit tandem necessariò punctum I intra circulum CNO; eritque PI (ob SP = PN) ipsarum IS, IN semidifferentia.

In Hyperbolâ & Ellipsi, in rectâ DF (productâ in hyperbolâ) intelligatur punctum E mobile, hâc lege, ut accedente I ad C, sit semper LC : CI :: DF : FE; Eritque (per Prop. 24. p. 1.) CI × DE = NIq, hoc est,

CI : NI :: NI : DE; & ob circulum erit
CI × IX = NI × IS, hoc est,
CI : NI :: IS : IX; Unde
NI : IS :: DE : IX.

Ex alterâ parte CL, est continuo NI ⊏ IS, adeoque DE ⊏ IX, ex alterâ IS ⊏ NI, *i. e.* IX ⊏ DE; utrobique vero accedente N ad C, accedit simul O ad R, X ad Q, & I ad C, fitque PI continuò minor, hoc est NI, IS adeoque DE, IX continuò propius ad æqualitatem accedunt; & tandem coincidentibus S, I, P, N, ipsi C; O ipsi R; adeoque X ipsi Q, & evanescente PI, fit IX *i. e.* jam CQ = DE; evanescente verò jam CI evanescit simul FE, *i. e.* CQ = DF.

In Parabolâ, Erit (omisso puncto E) propter sectionem CI × DF = NIq, hoc est,

CI : NI :: NI : DF, & propter circulum
CI : NI :: IS : IX; unde
NI : IS :: DF : IX; Et ad morem præcedentium, ostendetur, coincidentibus punctis, ipsas DF, IX simul fieri sibi mutuò, & rectæ CQ, æquales.

Corollaria ad hanc & prop. præced.

34, 35, *Coroll.* 1. In Sectionis Conicæ quâlibet diametro CL
36, 37, (productâ si opus in Ellipsi,) si fiat CQ æqualis ejusdem
38. diametri parametro, & in puncto C sectionem contingat recta CA; Circulus rectam CA in C contingens

&

& per punctum Q transiens erit sectioni in hoc puncto C æquicurvus. Si diameter C L non sit axis, satis liquet ex præcedentibus, nam non erit à circulo CR diversus. Cùm vero hæc proprietas competat cuilibet diametro præter axem, etiam axi competet; Nam diameter axi infinite vicina ab axe non differt, neque hujus parameter ab axis parametro.

Coroll. 2. Coincidente puncto C axis vertici G, (qui in ellipsi sit major,) coincident etiam ei puncta B, R, arcusque circuli C R qui prius erat extra sectionem evanescet, hoc est totus circulus C R erit intra sectionem. Puncto vero C (in Ellipsi) minoris axis vertici coincidente, arcus circuli qui prius erat intra sectionem evanescet, hoc est, totus circulus C R erit extra sectionem. 32. 36, & 37. 33, & 38.

Coroll. 3. Arctior igitur sive intimior est hujusmodi circuli & sectionis conicæ contactus quàm simplex quivis contactus, sed in axis vertice arctissimus: Nam si punctum C sit extra axis verticem simplici contactui C circuli C N O coincidit occursus N; In axis vero vertice his accedit & O, *i. e.* R. 32, 33. & 36, 37, 38.

Coroll. 4. In vertice axis parabolæ, determinati hyperbolæ, vel majoris ellipseos, liquet circulum G Q *i. e.* C Q maximum esse omnium sectioni inscriptibilium & eandem in eodem vertice G tangentium. Nam in vertice diametri axi infinite vicinæ, quæquè ideo ab axe non differt, circuli æquicurvi arcus extra sectionem erit infinite parvus, hoc est non differet circulus ab ipso circulo G Q; & quivis ejusmodi circulus circulo æquicurvo major ex utraque contactûs parte erit extra sectionem. Pari ratione in ellipsi erit Circulus G Q minimus omnium sectioni circumscriptibilium & eandem in vertice minoris axis G tangentium. 36, 37. 38.

Coroll. 5. Liquet etiam in hoc casu rectam C Q *i. e.* G Q esse circuli diametrum. Unde sumptâ in axe G Q = parametro axis, circulus diametro G Q erit sectioni in axis vertice G æquicurvus. 36, 37, 38.

Prop.

Prop. XII. Theor. VIII.

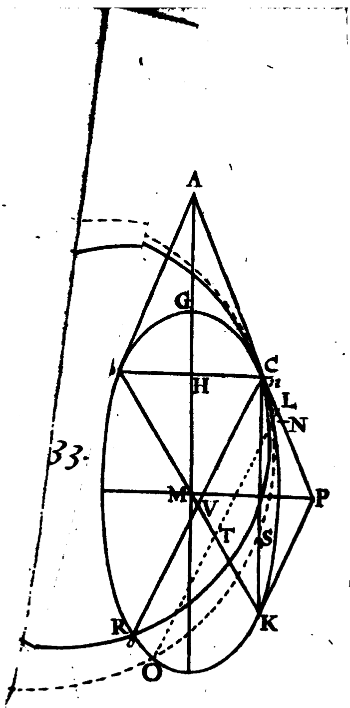
39, 40. *Parabolam contingat utcunque* T D *in* T; *huic vero parallela* F E *occurrat sectioni in* F, E *punctis, ex quibus ad quamlibet diametrum* D A Q H *ordinentur* E G, F H, *& ex tactu* T *recta* T O; *Si puncta* E, F *sint ex eadem parte diametri, dico duplum ordinatæ* T O *æquale esse summæ ordinatarum* F H, E G; *si ex partibus diversis, earum differentiæ.*

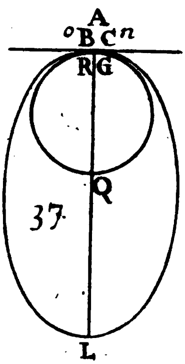
Ductâ diametro T I M, bisecat hæc E F in I; Acta E L parallela T M occurrat T O, F H (si opus productis) in N, L. Ob parallelas I M, E L & æquales F I, I E, æquales erunt F M, L M, T N; sed & (ob parallelas) æquales sunt L H, N O, E G, ergo $FM \pm EG = LM \pm LH = TO$ *i. e.* $FH \pm EG = 2\,TO$.

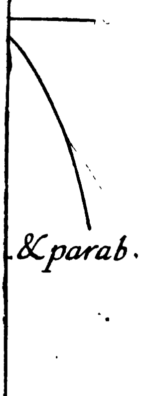
Prop. XIII. Theor. IX.

41, 42, 43, 44, 45. *Si Circulus occurrat Parabolæ in quatuor punctis* A, B, E, D, Fig. 41, 42; *Vel in tribus* A, B, Q, *quorum* Q *sit contactus*, Fig. 43, 44; *Vel in duobus tantum* Q, B, *quorum utrumvis* Q *sit contactus, & reliquum* B *intersectio*, Fig. 45; *Sintque ab his occursibus ordinatæ ad Parabolæ axem*, viz. A G, B I, E F, D H, Fig. 41, 42. A G, B I, Q O, Fig. 43, 44. *&* B I, Q O, Fig. 45. *Dico ordinatas ex unâ parte axis simul sumptas æquales esse ordinatis ex altera parte simul sumptis; Ordinata vero ex contactu, ubi tres sunt occursus*, Fig. 43, 44. *bis sumpta; ubi duo tantum*, Fig. 45. *ter sumpta intelligatur.*

41, 42. Si quatuor sint occursus; duos quoslibet A, B jungat A B, & reliquos duos D E occurrens A B si opus productæ in N: Inventis rectarum B A, D E diametris P V, Q S, in earum verticibus P, Q sectionem contingant P R, Q R concurrentes in R; erunt hæ rectis A B, D E paral-







& parab.

39

41
43
45

4

parallelæ, eritque (per prop. 18. p. 1.) $RQq : RPq :: NE \times ND : NA \times NB$; sed (propter circulum) $NE \times ND = NA \times NB$, ergo & $RQq = RPq$ *i. e.* $RQ = RP$. Connexâ PQ & bisectâ in O, erit junctâ RO ipsius diameter, quæ (ob $RP = RQ$) erit axis. Sed (per prop. præced.) in fig. 41. $BI + AG = 2PO = 2QO = FE + HD$; & fig. 42. $BI - AG = 2PO = 2QO = FE + HD$, unde $BI = FE + HD + AG$.

2. Si tres sint occursus quorum unus est contactus: 43, 44.
Intelligantur puncta E, Q, D (quæ in prioribus figuris diversa sunt) coincidere; Coincidentque rectæ DEN, QR; similiter EF, QO, DH: Eritque fig. 43. $BI + AG = 2PO = 2QO$, *i. e.* $EF + DH$; Vel (si AG sit ex eâdem parte axis quâ QO, fig, 44.) erit $BI - AG = 2PO = 2QO$, unde $BI = 2QO + AG$ *i. e.* $EF + DH + AG$.

In casibus præcedentibus, si occursuum aliquis A axis vertici coincidat, evanescente AG, fit unica ordinata ex unâ parte axis æqualis duabus ex parte alterâ, vel uni ordinatæ ex contactu bis sumptæ.

3. Si duo tantum sint occursus, quorum unus Q est 45.
contactus & reliquus B intersectio (ut in casu prop. 10.) Coincident puncta A, E, Q, D, N; Estque (per præced.) $BI - QO = 2PO = 2QO$, unde $BI = 3QO$ *i. e.* $AG + EF + DH$.

Prop. XIV. Theor. X.

In Parabolâ, cujus axis DAOB, *ejus vertex* A, *&* 46.
quælibet contingens TD, *occurrens axi in* D, *Sit* TO *ordinata à puncto* T *ad axim, &* TB *perpendicularis ad contingentem occurrens axi in* B; *Dico* OB *æqualem esse semiparametro axis.*

Nam (ob TO perpendicularem ex angulo recto) erit $TOq = BO \times OD =$ (per prop. 2. p. 2.) $BO \times 2OA =$ (per prop. 25. p. 1.) $OA \times$ param.

&

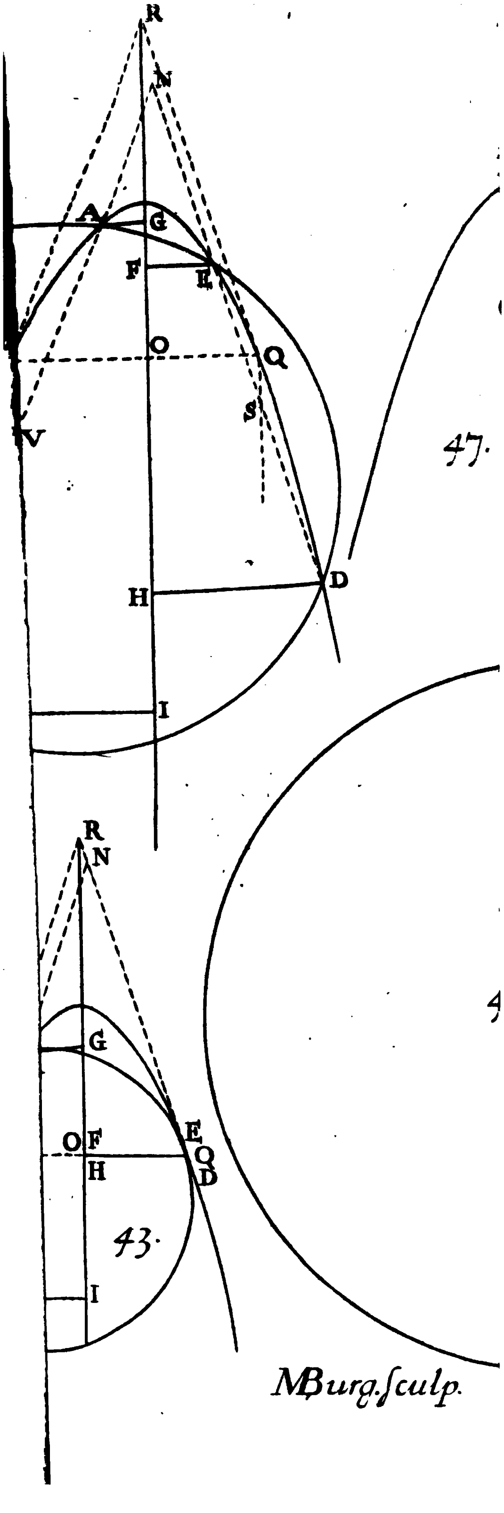
& (horum dimidia) $BO \times OA = OA \times \frac{1}{2}$ param. Unde $BO = \frac{1}{2}$ param.

Prop. XV. Theor. XI.

47. *In Parabola, cujus axis* BC, *ejus vertex* B, *alia quævis diameter* EF, *& ex* E *ordinata ad axem recta* EC; *dico* LR *parametrum diametri* EF *superare* lr *parametrum axis quantitate quadruplâ rectæ* BC; i. e. $lr + 4BC = LR$.

In E contingat EA occurrens axi in A, & ex B ad diametrum EF ordinetur BF; erit BF parallela EA; unde (ob BC parall. EF) erit $FE = BA =$ (per prop. 2. p. 2.) BC, & $AE = BF$; estque (propter axem) angulus ACE rectus, ergo $lr \times BC$ (per prop. 25. p. 1.) $= CEq = AEq - ACq =$ (ob $AB = BC$) $AEq - 4BCq = BFq - 4BCq = LR \times EF - 4BCq = LR \times BC - 4BCq$; unde (propter æqualem altitudinem BC) erit $lr = LR - 4BC$ vel $lr + 4BC = LR$.

PARS



M Burg. sculp.

PARS IV.

Prop. I. Theor. I.

SI Circulus BCDA *super axi majore Ellipseos, vel sectionum oppositarum determinato* AB, *tanquam diametro descriptus, rectam quamvis* IET *sectionem vel utramvis sectionum oppositarum utcunque in* T *tangentem secet in* C *&* D *punctis, & in his erigantur ad contingentem perpendiculares* CF, DH *occurrentes axi in* F, H; *Dico rectangula* $CF \times DH$, $BF \times FA$, $AH \times HB$ *sibi invicem, & quartæ parti figuræ axis, esse æqualia.* 1, 2.

Ex A & B erectæ ad axem perpendiculares contingentem secent in G, I; productæ si opus CF, DH circulo denuo occurrant in K, L; productaque denique (si opus) contingens occurrat axi in E, vel sit ei parallela. Si occurrat, erit ob sim triang.

$EB : EC :: BI : CF$, & propter circulum $EB : EC :: ED : EA ::$ (ob sim. triang.) $DH : AG$; unde $BI : CF :: DH : AG$, hoc est, $CF \times DH = BI \times AG =$ (per prop. 10, part. 2.) $\frac{1}{4}$ figuræ Axis.

Sed (ob chordas CK, DL ad chordam CD perpendiculares) erit $CK = DL$, &, cum sit BA diameter circuli, erit $CF = HL$, $HD = FK$; unde $CF \times DH = CF \times FK = BF \times FA = DH \times HL = AH \times HB =$ (prius) $\frac{1}{4}$ figuræ axis.

Si contingens sit axi parallela, quod fieri potest in Ellipsi; erunt CF, DH ad axem perpendiculares, & tam sibi invicem, quam rectis AG, BI æquales; Unde $CF \times DH = IB \times AG = CF q = BF \times FA = DH q = AH \times HB$.

Coroll. 1. Ob A H x H B = B F x F A, erit A H = B F, & B H = A F.

Coroll. 2. Cùm duobus tantùm hujusmodi punctis H, F intra Ellipsin vel utramque sectionum oppositarum convenire possit, quòd sit A H x H B & B F x F A = ¼ fig. axis; liquet eadem puncta H, F esse omnibus contingentibus communia.

Prop. II. Theor. II.

3. *In Parabolâ* T A, *si ab axeos* A K *vertice* A *erigatur usque ad quamlibet contingentem* T E *perpendicularis* A G, *&* *à puncto* G *recta ad contingentem perpendicularis* G H *secet axem in* H; *Erit ubique* H A = ¼ *parametri axis.*

A tactu T ordinatâ ad axem T K, erit (per Prop. 2. Part. 2.) A E = A K, unde G A = ½ T K, & G A q = (ob ang. rect.) H A x A E = ¼ T K q = A K x ¼ Param. = A E x ¼ Param. unde H A = ¼ Param.

1, 2. Aliter, considerari potest ut casus prop. præcedentis. Nam si Hyperbola vel Ellipsis A T vertice B in infinitum abeunte mutetur in Parabolam, circulus diametro A B degenerat in lineam rectam ad axem perpendicularem, coinciduntque puncta D, G, hoc est, rectæ D H, G H; estque H A x H B = A B x ¼ param. & (ob B infinite distans) H B = A B, unde H A = ¼ Param. axis A B; idemque punctum H erit omnibus contingentibus commune.

1, 2. *Def.* Puncta H, F (Prop. 1.) Veteribus *Puncta ex comparatione*, Neotericis *FOCI* sive *UMBILICI* appellantur.

3. De puncto H in Parabolâ (Prop. 2.) silent veteres, à neotericis tamen ob affectionum similitudinem iisdem nominibus insignitur.

Corollaria ad duas præced. Propositiones.

Coroll. 1. Unicus est Parabolæ focus; Sectionum oppositarum, & Ellipseos, Bini.

Coroll.

Coroll. 2. In Sectionibus oppositis & in Ellipsi, jun- 1, 2.
ctis I H, G H, erit angulus I H G rectus. Nam ob $AH \times$
$HB = IB \times AG$, *i. e.* $AH : AG :: IB : HB$, & an-
gulos ad B & A rectos, similia erunt triangula I B H,
H A G, & Ang. $BIH = GHA =$ compl. ang. I H B
ad rectum, proindeque I H G rectus: Pari modo jun-
ctis I F, F G, erit ang. I F G rectus. In Parabolâ, cùm 3.
punctum I infinitè distet, ductâ I H parallelâ T E, erit
ang. I H G manifeste rectus.

Coroll. 3. Atque hinc in oppositis Sectionibus & El- 1, 2.
lipsi, Circulus diametro I G transibit per utrumque fo-
cum. In parabolâ vero hujusmodi circulus (ob I G in- 3.
finitam) degenerat in rectam G H.

Coroll. 4. In omni Sectione Conicâ, quæ F E ex fo- 4, 5.
corum alterutro F est ad axem ordinata, æquatur axis
semiparametro. Nam in Opp. Sect. & Ellipsi sit C D
axis minor, erit (per *Coroll.* 7. Prop. 23. & *Coroll.* 4.
Prop. 24. p. 1.)

$$FEq : \left\{ \begin{matrix} DCq \\ AF \times BF \end{matrix} \right\} :: AF \times BF : BCq$$

i. e. $FE : DC : BC$ $\div$ proindeque $FE = \frac{1}{2}$ param.
In parabola (ob $BF = \frac{1}{4}$ param.) erit param. $\times \frac{1}{4}$ param. 6.
$= FEq$; unde $FE = \frac{1}{2}$ param.

Coroll. 5. In Ellipsi, si C D sit semiaxis minor, erit con- 4.
nexa D F vel D H æqualis semiaxi majori; Nam $FDq =$
$CDq + FCq =$ (propter *Coroll.* 4. Prop. 24. p. 1.) $BF \times$
$FA + FCq = BCq$, unde $BC = FD$.

In oppositis Sectionibus, vel hyperbolâ, si contingens 5.
in vertice B occurrat asymptoto in G, erit $CG = CF$;
vel si sit C D semiaxis secundus ipsi C B conjugatus
& connectatur D B, erit $DB = CF$. Nam ob ($CD = BG$)
erit $CG = DB$; estque $DBq = CDq + CBq =$
(propter idem *Coroll.* 4.) $AF \times FB + CBq = CFq$;
unde $DB = CF$.

Coroll. 6. Hinc in Ellipsi circulus centro D, intervallo 4, 5.
C B; In Hyperbola circulus centro C, intervallo D B
vel C G, transibit per utrumque focum.

Coroll. 7. Si Ellipseos axes sint æquales, hoc est si 4.

Sectio sit circulus, uterque focus centro coincidit; nam BF × FA = CDq = (in hoc casu) BCq, unde coincidunt F, C, H.

7. *Coroll.* 8. Si Hyperbola sit æquilatera, erit AF : BC :: BF ÷ nam AF × BF = ¼ param × AB = (in hoc casu, per *Coroll.* 1. Prop. 24.) BCq.

7. *Coroll.* 9. In Hyperbolæ æquilateræ utrâvis asymptoto, factâ CG = CB, & per G ductâ GF alteri asymptoto parallelâ, hoc est, ad CG perpendiculari, Hæc per focum transibit. Nam ob utrumque ang. GCF, GFC semirectum, erit GF = GC = (ex constru&ct.) CB = CD, ergo CF = DB.

3. *Coroll.* 10. In Parabolâ, à foco H ad cujuslibet contingentis TE medium punctum G ducta recta HG est ad contingentem perpendicularis. Nam non differt à perpendiculari à puncto G erectâ.

Prop. III. Theor. III.

8, 9. *In Hyperbolâ vel Sectionibus oppositis, & in Ellipsi, si ab utroque foco* F, H *ad quodvis sectionis punctum* T, *ubi recta* CTE *eandem contingit, agantur binæ rectæ* FT, HT; *Dico Angulum* FTC = HTE.

Occurrat primo CTE axi in E. Stantibus circulo & rectis CF, DH, ut prius.

8. In Hyperbolâ vel Sect. Opp. ordinatâ ad axem rectâ TK, per E ducatur XEY parallela TK *i. e.* ad BA perpendicularis secans circulum in X, Y; Cum sit propter sectionem (per *Coroll.* 1. Prop. 1. Part. 2.) BK : KA :: BE : EA, contingentes circulum in X, Y coibunt super circuli diametro BA (per *Coroll.* 17. Prop. 20. p. 1. & per Prop. 1. p. 2.) in puncto K, unde (per Prop. 3. p. 2.) CT : TD :: CE : ED.

9. In Ellipsi, ordinatâ ad axem TK, & productâ ad circulum in X, Y; cum sit BK : KA :: BE : EA, contingentes circulum in X, Y coibunt in E, Unde (per

8, 9. Prop. 1. p. 2.) erit in Ellipsi (uti prius in Hyperbolâ) CT:

CT : TD : : CE : ED ; (ob sim. triang.) CF : DH; ergo ob æquales angulos (rectos scilicet) FCT, HDT, & proportionalia latera, erunt triangula CTF, DTH similia, Unde Ang. FTC = HTE.

Si (in Ellipsi) sit CTD parallela AB, res per se manifesta est. *Supple fig. hujus casus.*

Prop. IV. Theor. IV.

Si Parabolam contingat utcunque CTG *in* T, *tactum vero* T *& focum* H *jungat* TH, *& per* T *agatur* FT *axi* HE *parallela; Dico Ang.* FTC = HTE. 10.

Manentibus quæ in Prop. 2. ob KA = AE, erit TG = GE, unde (ob ang. TGH rectum) similia & æqualia erunt triangula GTH, HEG; ergo Ang. HEG, *i. e.* FTC = HTG.

Aliter, Si Ellipsis, vel Hyperbola (foco F in infinitum abeunte) convertatur in parabolam, fiet FT parallela HE; estque semper Ang. HTE = FTC. 8, 9, 10.

Coroll. 1. Si duæ parabolam contingentes BE, DE concurrant in E, connexis DH, HB erit angulus ad focum DHB = 2 DEB. Tangentes (earum unâ productâ) occurrant axi in C, I, fiatque EG axi parallela; Ob ang. HDI = HID & HBC = HCB, erit angulus DHL = 2 DIH = 2 DEG, & LHB = 2 BCH = 2 BEG; Unde DHB = 2 DEB. Si puncta H, E sint ad diversas partes rectæ conjungentis tactus D, B; ostendetur angulum ad focum æqualem esse duplo complementi Anguli DEB. 11.

Coroll. 2. Contingentes in extremis B, D rectæ cujusvis BHD per parabolæ focum ductæ, concurrentes constituunt angulum BED rectum. Nam ostendetur ut in priore *Coroll.* Ang. BHL + DHL, *i. e.* 2. Rect. = 2 BED. 12.

Prop. V. Theor. V.

In Hyperbolâ vel Sectionibus oppositis & Ellipsi, si ab utroque foco H, F *ad quodvis Sectionis punctum* T 8, 9.

ducantur

ducantur rectæ H T, F T; *Dico in Ellipsi summam ipsarum* H T, F T, *in Hyperbolâ earundem differentiam æquari axi* A B.

8, 9. Manentibus quæ in Prop. 3. Sit centrum O, & connectatur O D, vel O C, *ex* : *gr* : O D, rectaque H D producta occurrat F T productæ (si opus) in S. Propter Ang. H T D = (per Prop. 3.) S T D, & ang. T D H rectum, erit S T = T H & S D = D H; estque in Ellipsi F S = F T + T H, in Hyperbola F S = F T — T H.

Propter F H & S H bisectas in O & D, erit O D parallela F S, & F S = 2 O D = (ob circulum) A B.

Coroll. 1. Si ab utrovis foco Hyperbolæ vel Sect. Opp. sive Ellipseos ad cujuslibet contingentis T E tactum T ducatur F T, & à centro Sectionis O ad contingentem usque agatur O D ipsi F T parallela; erit O D æqualis semiaxi O B, vel O A. Incidit enim in punctum D, ubi contingens T D circulo C D A occurrit.

Coroll. 2. Rectang. F T × T H æquale est $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T. Nam ductis A G, B I (ut in Prop. 1.) circulus diametro I G, qui per (*Coroll.* 3. Prop. 2.) transit per F, H, propter ang. T D H rectum & D H = D S, transibit etiam per S; unde (& ob S T = T H) erit F T × T H = F T × T S = I T × T G = (per *Coroll.* 2. Prop. 10. p. 2.) $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T.

Scholium. Focorum altero, *ex. gr.* F, in infinitum migrante & sectione in Parabolam mutatâ, tam $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T, quam rectang. F T × T H fiunt magnitudinis infinitæ; evaditque T H = $\frac{1}{4}$ param. diametri per T, ut deinceps monstrabimus.

Nota: S D = D H; & F S = B A.

Prop. VI. Theor. VI.

13, 14. *Iisdem positis; In Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi, si à tactu* T *erecta ad contingentem perpendicularis* T V *secet axim in* V, *& ab* V *demittantur ad* F T, H T (*si opus productas*) *perpendiculares* V X, V Y; *Dico* T X, T Y *esse sibi invicem, & axis semiparametro æquales.*

Idem

Idem erit in Parabolâ, si ab hujusmodi puncto V *demittantur perpendiculares ad rectam* T H *unicum sectionis focum* H *& tactum* T *conjungentem, & ad rectam* T F *per tactum ductam axi parallelam.* 15.

Propter angulum C T F = D T H (per prop. 3.) & V T ad C T perpendicularem, erit ang. V T Y = V T X, & (ob angulos ad X & Y rectos, & commune latus T V) erunt triangula V T X, V T Y similia, & æqualia; unde T X = T Y: Rursum (ob ang. C T V rectum) erit T V parallela C F, & triangula F T V, F S H similia.

Item (ob angulum T X V rectum, & T V ∥ F C) Triangula T F C, V T X similia sunt: Unde

F S : S H :: F T : T V &

T X : F C :: T V : F T, Ductisque &c.

F S × T X : S H × F C :: F T × T V : F T × T V, Hoc est, F S × T X = S H × F C = (ex notâ præced.) 2 D H × F C = (per Prop. 1.) $\frac{1}{2}$ param. × A B; sed F S (per notam præced.) = A B, ergo T X = $\frac{1}{2}$ param. = T Y.

In Parabolâ, Ordinatâ ad axem T L, erit (ut in priore parte) triang. V T Y = & sim. V T X = & sim. V T L, Unde Y T = T X = L V = (per Prop. 14. p. 3.) $\frac{1}{2}$ param. 15.

Hoc etiam in Parabolâ vel inde liquet, quòd Ellipseos vel Hyperbolæ foco altero F in infinitum abeunte, & sectione in Parabolam mutatâ, fiat T F axi parallela. 13, 14.

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. & Ellipsi; Cùm sit ob sim. triang. T Y : H D :: T V : T H &

$\left.\begin{matrix}\text{T X}\\ \text{T Y}\end{matrix}\right\}$: F C :: T V : T F, Erit ductis &c. 13, 14.

T Y q : H D × F C :: T V q : T H × T F;

Hoc est, T V q est ubique ad $\frac{1}{4}$ fig. diametri per T, in constanti ratione $\frac{1}{4}$ quad. param. axis, ad $\frac{1}{4}$ fig. axis: Ideoque T V est ubique ad semidiametrum semidiametro per T conjugatam, in constanti ratione semiparametri axis majoris vel determinati ad semiaxem huic conjugatum; nempe prioris subduplicatâ.

Prop.

Prop. VII. Theor. VII.

16, 17. *In Hyperbolâ sive sect. opp. & Ellipsi, si ex cujuslibet contingentis* GT *tactu* T *erecta ad eandem perpendicularis* TV *secet axim in* V, *junctis* FT, TH, *ut in præcedentibus; Dico in Hyperbolâ sive sect. opp.* $VH \times VF - VTq$, *in Ellipsi* $VH \times VF + VTq = HT \times TF = \frac{1}{4}$ *fig. diametri per* T.

Ductis AG, BI, ut in præcedentibus, & diametro GI descripto circulo, idem (per *Coroll.* 3. Prop. 2.) per focos H, F transibit: Per V & circuli centrum M ducta VM occurrat circulo in O, P; Erit (propter circulum, & ang. VTG rectum) in sect. opp. $VO \times VP + MOq = VH \times VF + MOq = MVq = VTq + MTq = VTq + TG \times TI + \left\{ \begin{matrix} GMq \\ MOq \end{matrix} \right\}$ Unde $VH \times VF - VTq = TG \times TI = \frac{1}{4}$ fig. diam. per $T =$ (per *Coroll.* 2. Prop. 5.) $TH \times TF$.

In Ellipsi, $MOq - VO \times VP = MOq - VH \times VF = MVq = VTq + MTq = VTq + \left\{ \begin{matrix} MGq \\ MOq \end{matrix} \right\} - GT \times TI$; Unde erit $VH \times VF + VTq = TG \times TI = \frac{1}{4}$ fig. diam. $= TH \times TF$.

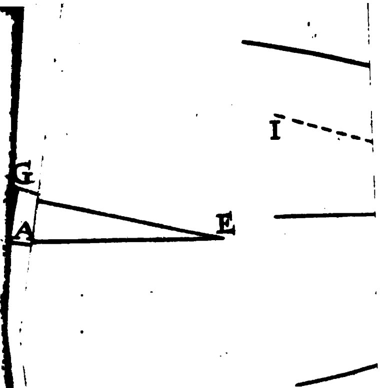
Coroll. 1. Hinc, & per lemma 2. p. 1. in sect. opp. $AV \times VB - AH \times HB - VTq$, in Ellipsi $AV \times VB - AH \times HB + VTq = TH \times TF$.

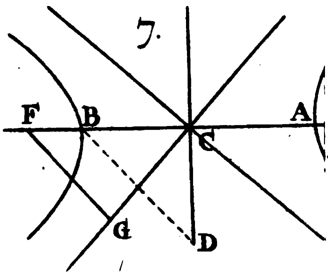
Coroll. 2. Cum sit per *coroll.* prop. 6.

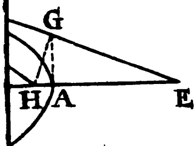
13, 14.
16, 17. $TYq : HD \times FC :: TVq : \left\{ \begin{matrix} TH \times TF \\ \text{in Hyp. } VH \times VF - TVq \\ \text{in Ellip. } VH \times VF + TVq \end{matrix} \right\}$

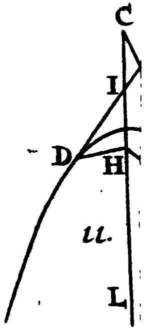
erit comp. vel div. $HD \times FC \pm TYq : TYq :: VH \times VF : TVq$. Hoc est, $HV \times VF$ est ad TVq in constanti ratione $\frac{1}{4}$ fig. axis in Hyp. +, in Ellipsi − $\frac{1}{4}$ quad. param. axis, ad $\frac{1}{4}$ quad. param. axis; Vel (propter communem altitudinem *viz.* semiparam. axis) in ratione semiaxis ± ejus semiparametro, ad ipsam semiparametrum.

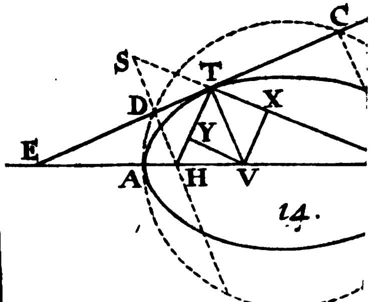
Prop.


I
G
A
E


7.
F
B
A
C
G
D


G
H A
E


C
I
D
H
11.
L


C
S
T
X
D
Y
E
A
H
V
14.

Prop. VIII. Theor. VIII.

In omni Sectione Conicâ, & in Sectionibus oppositis, si per focum F *agatur recta linea* P F L *sectioni, vel sectionibus oppositis occurrens in* P, L *punctis, in quibus sectionem, vel sectiones oppositas contingant* P E, L E *concurrentes in* E, *sive forte inter se parallelæ; Connexâ* F E, [*vel, si contingentes sint parallelæ, ductâ* F E *bis parallelâ,*] *dico ang.* E F P *rectum esse.* 18, 19. Supple figuras Hyperb. & Sect. opp.

Invento axe C F A, in utrovis ejus extremo [vel unico in Parabolâ] A, erigatur ad eundem perpendicularis A D (*i. e.* contingens) cui producta (si opus) L P occurrat in D, vel sit ei parallela.

Si occurrat. A puncto D ducatur (per prop. 4. p. 2.) contingens D I N; occurret hæc axi in N, vel erit ei parallela.

Tactus A, I jungat recta A I, secans L P in M, hæc producta (per Prop. 7. p. 2.) transibit per E, rectaque A E in punctis A, M, I, E (per Prop. 1. p. 2.) harmonicè dividitur.

Porro in Hyperbolâ, Sectionibus oppositis, & Ellipsi, in altero axis extremo C sit contingens C G, occurrens D I N in G, & connectatur E G.

Si quidem recta D I G N occurrat axi in N, (quod semper fit, unico casu in Ellipsi excepto,) eadem (per *Coroll.* Prop. 9. p. 2.) harmonicè dividitur in D, I, G, N; aliàs bifariàm tantùm dividitur à punctis D, I, G. Est verò punctum I utrique rectæ D I G N, A M I E commune, & reliqua divisionum puncta debito ordine (juxta Lem. 9, vel 10. p. 2.) jungunt rectæ D M, E G, A N, [aut saltem erit A N parallela D I,] unde (per idem Lem. 9, vel 10.) rectæ D M, E G, A N in unum punctum coeunt, quod erit necessariò punctum F, in quod rectæ P L *i. e.* D M, & A C *i. e.* A N priùs coibant, hoc est, recta E G rectæ E F coincidit;

N unde

unde angulus E F P, *i. e.* G F D (per *Coroll.* 2. prop. 2.) erit rectus.

19. In Parabolâ, I D N semper occurrit axi, & bisecatur in D, estque punctum I utrique rectæ I D N, I M A E commune; unde rectæ D M, N A quæ utriusque rectæ puncta debito ordine conjungunt, & recta E H à reliquo puncto E ducta parallela I D N, coibunt (per Lem. 10. p. 2.) in unum idemque punctum F, in quod scilicet rectæ N A & P L *i. e.* D M primò coibant; hoc est, coincidit E H ipsi E F; estque (ob rectas parallelas) ang. E F D *i.e*, E F P=I D F, qui (per *Coroll*, 10. Prop. 2.) est rectus.

In Ellipsi, & opp. Sect. si P E, L E sint parallelæ, recta P L axi coincidit.

Si P L sit parallela A D, erit ad axem ordinata, rectaque E F axi coincidet; estque in utroque casu propositio per se manifesta.

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. punctorum L, P altero *ex. gr.* P in infinitum abeunte, contingens P E fit asymptotos, evaditque ipsi L F parallela; rectaque E F ab occursu contingentis L E cum eâdem asymptoto ad focum ducta erit tam ad asymptoton, quàm ad rectam L F perpendicularis. Vel conversim; Ab E erecta ad asymptoton perpendicularis per focum transibit.

Prop. IX. Theor. IX.

20, 21. *Supple figuram sectionum opp.* *In Hyperbolâ, Sectionibus Opp. & Ellipsi, sint foci* A, B, *& axis major vel determinatus* G H; *in qua* (*producto in Ellipsi*) *sumatur punctum* C, *ut sit* A B : G H :: B H : H C; *& à puncto* C *erectâ ad axem perpendiculari* C E, *sumatur quodlibet in Sectione vel utrâvis sectionum opp. punctum* K, *à quo ducta* K E *axi parallela occurrat* C E *in* E, *& connectatur* B K; *Dico* A B : G H :: K B : K E.

Producta K B (si opus) occurrat denuò sectioni, [vel sectioni cujus est focus B, si punctum K sit ad sectionem oppo-

oppositam,} in I. Propter $AB : GH :: BH : HC$, erit alternando & componendo in Ellipsi, dividendo in Hyperbolâ & sectionibus oppositis,

$$\left.\begin{matrix} AB \pm BH \\ GB \end{matrix}\right\} : BH :: \left\{\begin{matrix} GH \pm HC \\ GC \end{matrix}\right\} : HC$$

Erit itaque (per prop. 1, & 6. p. 2.) recta CE illa in cujus punctum aliquod D coeunt rectæ KD, ID sectionem vel sectiones oppositas in punctis K, I tangentes; ductâque DB, erit (per prop. præced.) ang. DBK rectus, & ob angulum DEK pariter rectum, circulus diametro KD per puncta E, B transibit.

Ducta AK (& si opus producta) secet circulum in F, & connectantur FE, FB.

Propter ang. FKD (per prop. 3.) = BKD, erit arcus KF = KB, chordaque KF = KB, ac proinde (per prop. 5.) AF = GH.

Porro (ob rectas parallelas) erit angulus FKE = FAB; & (ob FK = KB) erit in Ellipsi & opp. sect. ang. FEK = KFB, in hyperbolâ vero ang. FEK = compl. KBF = (ob arcum KF = KB) complemento KFB, *i.e.* BFA; Unde in omnibus triangula FEK, FBA similia sunt; unde

$$AB : \left\{\begin{matrix} AF \\ GH \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} FK \\ KB \end{matrix}\right\} : KE.$$

Coroll. In Hyperbolâ vel sect. opp. ducta KN asymptoto LM parallelâ, occurrente CE in N, erit KN = KB. Nam ducta HL parallelâ CE occurrente asymptoto in L, erit (per *Coroll* 5. prop. 2.) ML = MB; & ob sim. triang. 22.

$$\left\{\begin{matrix} ML \\ MB \end{matrix}\right\} : MH :: KN : KE :: \left\{\begin{matrix} 2MB \\ AB \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} 2MH \\ GH \end{matrix}\right\} :: KB : KE;$$

Unde KN = KB.

Prop. X. Theor. X.

Sit Parabola HK, *cujus focus* B, *& axis* BH, *in quo sumatur extra sectionem* HC = HB; *in puncto* C *erectâ ad axem perpendiculari* CE, *sumatur quodvis* 23.

in sectione punctum K, *à quo ducta* K E *axi parallela occurrat* C E *in* E, *& connectatur* BK; *dico* BK = K E.

Ductâ contingente M K G, & ordinatâ K O; ob ang. M K L (per prop. 4) = G K B = K G B, erit G B = B K: Sed (per prop. 2. p. 2.) G H = H O, unde additis æqualibus H B, C H, erit G B *i. e.* K B = C O = (ob rectas parallelas) K E.

20, 21. Aliter, considerari potest ut casus præcedentis; nam si Hyperbolà vel Ellipsis, foco A in infinitum migrante, mutetur in Parabolam, fit A B = G H & B H = H C, unde B K = K E.

23. *Coroll.* Cum sit (per prop. 15. p. 3.) H O quarta pars excessûs parametri diametri K L supra parametrum axis, & C H = H B (per prop. 2.) sit quarta pars parametri axis; Liquet K B sive K E = C O æquari quartæ parti parametri diametri K L.

Prop. XI. Theor. XI.

24, 25. *Sit Parabolæ vel Hyperbolæ focus* B, *& per* B *ad axem ordinata* B I; *Sumptoque in sectione vel utràvis sect. opp. puncto quovis* K, *agatur* K D, *in Parabolâ axi, in hyperbolâ verò sive sect. opp. utrivis asymptoto parallela, occurrens* B I (*si opus productæ*) *in* D, *& connectatur* B K; *Si punctum* D *cadat intra sectionem, Dico ipsarum* B K, K D *summam, Si extra, earundem differentiam, æqualem esse semiparametro axis.*

Sit recta C E eadem quæ in præcedentibus, cui occurrant K D (si opus producta) in E, I L verò ducta ipsi K D parallela in L. Estque (per *Coroll.* 4. prop. 2.) B I = Semiparametro axis = (per præced. vel *coroll.* prop. 9.) I L. = (ob rectas parallelas) D E, = K E ± K D vel K D — K E, = (per præced. vel *coroll.* prop. 9.) B K ± K D vel K D — B K.

Coroll.

Coroll. Si B K sit alteri asymptoto parallela, erit triang. B K D isosceles; & ob B K + K D = B I & B K = K D, erit B K = ½ B I = ¼ parametri axis. 26.

Scholium. Inter Parabolæ diametros & rectas hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptoto parallalleias, maxima est (ut passim observare licuit) affinitas atque analogia; cujus rei modò ostensæ proprietates sunt insignia præ aliis exempla.

PARS

PARS V.

Propositio I. Probl. I.

1\. *In plano quovis* ACD, *datâ positione rectâ* ACF *pro diametro sectionis conicæ* [*vel sect. opp.*] *quæ in hyp. vel. sect. opp. sit determinata, cum utrovis, vel unico, ejus vertice* A, *& duabus ordinatis* DC, GF, *ad eandem in quovis angulo* ACD *inclinatis*;

2, 3. *Vel datâ* (*ut priùs*) *diametro* ACF, *cum utroque vertice* A, F, *& unicâ ordinatâ* CD, *ad eandem in angulo* ACD *inclinatâ*;

4\. *Vel denique diametro* AC, *cum uno vertice* A, *& unicâ ordinatâ* CD, *ad diametrum* AC *sub angulo* ACD *inclinatâ, & rectâ* DT *pro contingente in ejus extremo* D;

Hujusmodi sectionem in superficie conicâ exhibere.

Oportet autem nec puncta G, D, *nec rectam* DT, *cum dato vertice* A *in directum jacere.*

1\. 1. PRoductis DC, GF in B, E, ut sit CB = CD, EF = FG, Per parallelas BD, EG transeant duo plana invicem parallela BCK, EFI, ad planum ACD quomodolibet inclinata; In quorum utrovis, *ex. gr.* in illo per BCD, super BD tanquàm chordâ statuatur circulus BKDL; ex C erectâ in eodem plano ad BD perpendiculari LCK occurrente circulo in L, K, per rectas ACF, LCK transeat planum secans alterum ex planis parallelis in FI, quæ proinde erit ad LCK parallela.

Connexâ AK vel AL *ex. gr.* AK, hæc (producta si opus) secet FI in I; deinde in plano EFI per puncta E, G, I describatur circulus secans IF in H; connexa denique

denique H L fecet AK (utpote in eodem plano sitam) in V.

Superficiei conicæ, vertice V, basi circulo BKDL vel HEIG, genitæ, cum plano ACD intersectio, *viz.* EBADG, est sectio proposita.

Ob rectas BD, EG, & LK, HI parallelas, & ang. BCK (ex constr.) rectum, erunt LK, HI circulorum diametri. Bisectâ LK in N, ductâque VN (& si opus productâ,) bisecabit hæc HI in M, eritque VNM coni axis utrâvis basi, vertice V geniti.

Per VNM transeat planum secans circuli LBKD planum in NP, planum vero circuli HEIG in MO, eorumque peripherias in P, O, & connectantur PV, OP.

Erunt (ob plana parallela) PN, OM parallelæ, & propterea quòd N, M sint circulorum centra, erit NK = NP, MI = MO, & ob sim. triang.

$$VN : VM :: \left\{\begin{matrix} NK \\ NP \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} MI \\ MO \end{matrix}\right\} \text{ unde rectæ}$$

VP, PO in directum jacent, & sic ubique; Una itaque eademque est superficies conica sive basi LBKD, sive HEIG, & vertice V genita. Transit verò per puncta G, D, A, B, E, bisecatque ACF rectas BD, EG, in C, F, unde (per *Coroll.* 10. prop. 20. p. 1.) est harum diameter; ideoque sectio GDABE est sectio proposita.

2. Si detur unica ordinata CD cum utroque vertice A, F: Factâ CB = CD, ductoque circulo LBKD, & rectâ LCK, ut in priore casu; In plano per ACF, LCK connexa LF occurrat connexæ AK in V, eritque superficiei conicæ vertice V, basi LBKD, genitæ, cum plano ACD intersectio, *viz.* FBAD sectio proposita. 2, 3.

Transit enim per puncta B, A, D, F; Si veró planum secundùm rectam VK superficiem contingat, secans planum circuli in KQ, planum vero sectionis in AR, erit ang. CKQ rectus, adeoque KQ parallela CD, quæ (per lemma. 1. p. 1.) est parallela AR; tangit

verò

verò A R sectionem in A, bisecatque A C rectam B D in C, unde (per *coroll.* 11. prop.20.) est rectæ B C D atque huic parallelarum diameter; ideóque F B A D sectio proposita.

4. 3. Si, dato uno tantum vertice A, detur unica ordinata D C, cum rectâ D T pro contingente in ejus extremo: Ducto circulo L B K D & rectâ L C K, ut priùs, circulum contingat D X in D; Per D T & D X transeat planum secans planum per A C, L C K in rectâ X T (nisi forte fuerit planum T D X plano A C K parallelum) cui occurrat connexa A K in V; Erit superficiei conicæ vertice V, basi L B K D, genitæ, cum plano A C D intersectio, *viz.* B A D, sectio proposita.

Transit enim per B, A, D; Et quoniam, connexâ V D, planum V D X tangit superficiem, recta D T (quæ est in plano contingente) tanget sectionem: Quòd verò recta A C sit ordinatæ B C D, atque huic parallelarum, diameter, patet ut in priore casu.

Supple hos casus. Si in 1^mo^ vel 3^tio^ casu datus unus vertex A, in 2^do^ è duobus alteruter A, infinitè distet, (non existente in 1^mo^ connexâ G D, in 3^tio^ rectâ D T parallelâ A C) hoc est, si reliquis datis, exhibenda sit sectio quæ sit Parabola; Ductâ rectâ A K parallelâ A C F, manet reliqua constructio: Erit verò (ob A K parallelam A C) planum sectionis plano secundùm V A K superficiem tangenti parallelum, ideoque sectio erit Parabola. In cæteris demonstratio haud erit diversa.

Si punctum V infinitè distet, hoc est, si rectæ H L, A K in primo casu, F L, A K in secundo, vel in tertio K A, T X, parallelæ sint, fit superficies cylindrica, quæ est superficies conica cujus vertex infinitè distat: sed mutatâ planorum ad invicem inclinatione, manente circulo; vel assumpto majoris minorisve diametri circulo, manente planorum inclinatione, vertex V ad distantiam finitam accedet. Idem intellige si in tertio casu planum T D X sit plano A C K parallelum.

Si puncta G, D in primo casu, vel recta D T in tertio,

io, & datus vertex A in directum jacere intelligatur, Coincident puncta A, V, & loco sectionis conicæ prodibunt duæ rectæ, *i. e.* sectio per verticem.

Si simul datus vertex A infinitè distet, & vel connexa G D in primo casu, vel recta D T in tertio, sit latæ diametro parallela, abeunte coni vertice in infinitum, Parabola in duas rectas diametro parallelas, & ab eâdem utrinque æqualiter distantes abibit.

Coroll. Cùm in quovis hujus propositionis casu, tam 1, 2, circulus L B K D, modò recta B D eidem inscribi possit, 3, 4. quàm plani ejusdem circuli ad planum A C D inclinatio pro libitu assumatur; His quomodolibet variatis, orientur superficies conicæ numero infinitæ, quarum quævis proposito satisfacit.

Prop. II. Probl. II.

Datis in plano duabus rectis non parallelis A G, A C, 5. *pro Hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptotis, & extra easdem puncto* B *per quod sectio transeat, Hujusmodi sectionem in superficie conicâ exhibere.*

Per B ductâ G B C datas rectas in G, C secante, factâque C D = B G, super B D tanquam chordâ statuatur cujusvis magnitudinis Circulus B E F D, in plano scilicet ad planum A G C quomodolibet inclinato: Ex punctis G, C circulum contingant G E, C F; junctisque tactibus E, F, erit E F parallela G C: Nam (ob G B = D C, & propter circulum) G D x G B = G E q = C D x C B = C F q, *i. e.* C F = G E; unde, si G E, C F parallelæ sint, erit E F parallela G C; sin concurrant in I, erit (ob circ.) etiam E I = F I, unde iterùm erit E F parallela G C.

Per E F igitur transeat planum plano A G C parallelum, secans plana per A C, C F & A G, G E in rectis F V, E V: Si vertice V, basi circulo B E F D, generetur conica superficies, erit ejus intersectio cum plano G A C, *viz.* B H D, sectio proposita.

Nam, cùm sectio fiat à plano G A C plano p ticem E V F superficiem secante parallelo, erit bola [vel sect. opp.] Transit etiam per B; T vero plana V F C, V E G superficiem conicam; deque erunt A G, A C (per prop. 13. p. 1.) s asymptoti.

5. *Coroll.* Pro variâ circuli B E F D magnitudin ejusdem circuli ad planum G A C inclination rectæ G B C positione, orientur superficies con mero infinitæ, quarum quævis proposito satisf

Prop. III. Probl. III.

6, 7, 8. *Datis in plano quinque punctis* P, Q, R, S, T, (*q unum, vel duo quævis, secundum datas direct reliquis infinite distare possunt,*) *per quæ sect conicam* [*vel sect. opp.*] *transire oportet; Huj sectionem in superficie conicâ exhibere.*

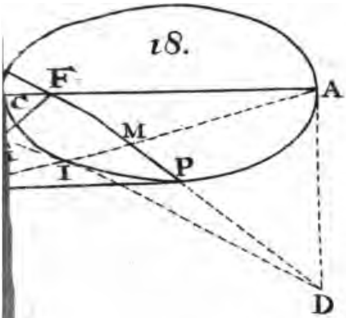
Oportet autem ex datis punctis nulla tria in dire jacere; Nec (*quod idem esset*) *punctum aliqu cundum rectæ duo alia conjungentis direction finite distare.*

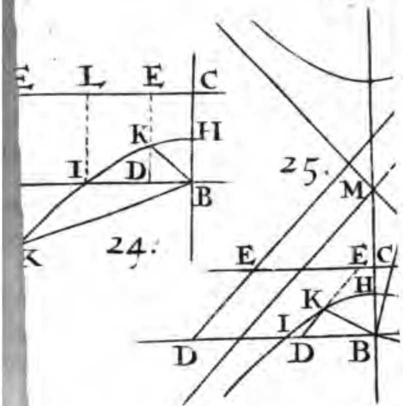
Connexis *ex. gr.* Q P, R P, [aut ductis secundù tam directionem parallelis,] agantur his respectiv rallelæ T X, T Y, quibus connexæ Q S, R S, [au ctæ secundùm datam directionem ad invicem para occurrant in x, y, respectivè; junctâque R Q, s T X in X, fiat T x : T X : : T y : T Y, (sumpto easdem partes puncti T respectu y, ad quas jacet X spectu x,) & connectatur R Y.

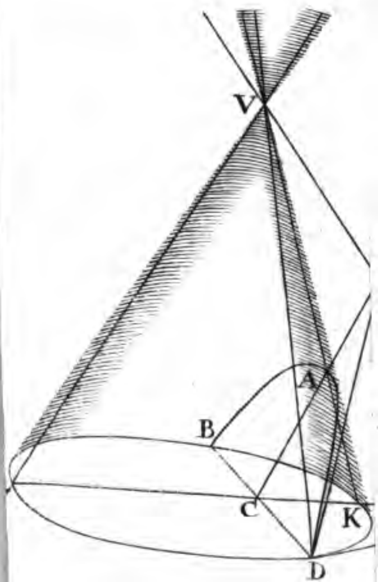
Per Q ducatur Q K ipsi R Y parallela, secans T X in K, fiatque T x : T y : : T K : T I, (sumpto I a easdem partes puncti T respectu y, ad quas jacet K re spectu x,) & connectatur R I occurrens Q K in V.

Bisectâ Q V in M, connexâque R M, per T agatur T O ipsis R Y, Q V parallela, occurrens R M in O; Si diametro R O M, vertice R, ordinatis Q M, T O,

fiat


18.
F
A
C
M
I
P
D


E L E C
K H
I D
B
K
24.
25.
M
E E C
H
K
I
D D B


V
A
B
C
K
D

fiat in superficie conicâ (juxta prop. 1.) sectio conica [vel sect. opp.] erit eadem sectio quæsita.

Nam recta RY (per *coroll.* 8. prop. 20. p.1.) sectionem in R contingit; Suntque (per constr.) præter tactum R puncta T & Q ad sectionem, adeoque (ob QM = MV) punctum V; Unde, propter T*x*: T*y* :: TX : TY :: TK : TI, sectio (per *cor.*3. prop. 35. p.1.) transibit per P; & propter TX : TY vel TK : TI :: T*x* : T*y* (per ejusdem prop. *coroll.* 2.) transit per S; aut saltem erunt QP, RP, vel QS, RS sectionis asymptoto vel parabolæ diametris parallelæ.

Incidente puncto V in Q, diametro RQ, verticibus R, Q, ordinatâ ex T parallelâ RY, exhibenda est sectio, per prop. 1. cas. 2. & QV sectionem continget. *Supple figuras horum casuum.*

Si fortè recta RM transit per T, Diametro RT, verticibus R, T, ordinatâ QM, exhibenda est sectio.

Si ordinata per T transit per S vel Q, Ductâ per R rectâ bisecante ST, vel QT, hâc sumptâ pro diametro, dimidiâ ST vel QT pro ordinatâ, vertice R, & aliâ ordinatâ per Q vel S, exhibenda est sectio. Haud absimilis est casus, si ordinata ex T vel Q transit per P.

Si coincidant puncta Q, S, hoc est, si detur recta QS pro contingente in Q, coincident rectæ SR*y*, QXR, rectaque Q*x*. *i.e.* QS (per *coroll.* 1. prop. 35. p. 1.) continget sectionem, quod oportuit. Idem erit de punctis Q, P, per ejusdem prop. *coroll.* 4.

Sin coincidentibus Q, S vel Q, P, ordinata per T transit per Q, Vertice R, ordinatâ dimidiâ QT, diametro rectâ per R bisecante QT, & contingente QS vel QP, exhibenda est sectio, per prop. 1. cas. 3.

Si P vel S ipsi R coincidat, hoc est, si detur RP vel RS pro contingente, coincidet RY ipsi RP vel vel RS, propter TX infinitam, vel æqualem T*x*.

In omnibus his casibus manet reliqua, tam constructio, quàm demonstratio; aliquando etiam utraque evadit simplicior,

Cùm hæc constructio manifestè requirat, quòd (ratione munerum quæ singulis punctis assignavimus) præ-

ter P vel S nullum infinite distet, quódque nec P ipsi S, nec Q ipsi R, nec T alii cuivis coincidat; ut in casu, ubi dantur (pro quinque punctis) duæ rectæ quæ in datis punctis contingant cum infinitè distante puncto, directè locum non habeat; Nihilominus ad hunc quoque casum extendi potest. Nam si tangentes Q P, R S con-
9. currant in A; per A ductâ rectâ A B, secundùm infinitè distantis puncti T directionem, secante tactus conjungentem in B, bisectâque A B in *t*; duarum contingentium & puncti *t* ope exhibebitur sectio, cujus asymptoto, vel diametris (si parabola fuerit,) erit A B [vel P T] parallela: secus enim propter prop. 1. p. 2. non bisecaretur A B à sectione in *t*, quod, si parallela sit, omnino fiet per ejusdem prop. *coroll.* 4. vel ejus-
10, dem partis prop. 2. Sin contingentes parallelæ sint; Erit medium punctum tactus conjungentis B sectionis centrum, per quod secundùm infinitè distantis puncti directionem ductâ rectâ B C secante unam ex tangentibus in C, erit hæc una ex asymptotis, factâque P E = P C, erit connexa B E altera; reditque casus in illum prop. præcedentis.

Si pro duobus punctis detur recta quæ in dato puncto contingat, oportet ut non per aliud ex datis punctis transeat, nec sit rectis secundum quarum directionem aliquod ex datis punctis infinite distat parallela. Nam uti recta in tribus punctis sectioni non occurrit, ita contingens sectionem ei non amplius occurrit, nec potest esse asymptoto hyperbolæ vel parabolæ diametris parallela.

Coroll. Hinc, & ex *coroll.* prop. 1. sequitur Inveniri posse superficies conicas numero infinitas quarum quævis proposito satisfacit.

Prop. IV. Probl. IV.

11, 12. *Per data quævis quinque puncta* P, Q, R, S, T [*quorum unum, vel duo infinitè distare possunt,*] *sectionem conicam vel sect. opp. in plano describere. Oportet autem*

Supple reliquos casus.

autem horum nulla tria in directum jacere, nec aliquod secundum duo alia conjungentis directionem infinite distare.

Junctis *ex.gr.* P Q, P R & S Q, S R, [vel ductis secundum datas directiones parallelis si P vel S infinite distet,) agantur ipsis P Q, P R respectivè parallelæ T X, T Y, rectis Q S, R S in X, Y occurrentes, in quibus sumantur puncta x, y vel simul ad easdem, vel simul ad contrarias puncti T partes, ad quas jacent X, Y, ut sit T X : T Y : : T x : T y, & connectantur Q x, R y sese in s intersecantes, vel forte inter se parallelæ; Erit punctum s ad sectionem, vel saltem erunt Q x, R y hyperbolæ [vel sect. opp.] asymptoto, vel parabolæ diametris parallelæ. Atque hoc modo innumera puncta inveniri possunt.

Quòd sectio conica [vel sect. opp.] per puncta P, Q, R, S, T omnino transire possit, liquet per prop. præced. Et quòd unica, per *coroll.* 5. prop. 35. p. 1; Ad quam (per ejusdem prop. *coroll.* 2.) erit punctum s, vel saltem erunt Q x, R y asymptoto hyperbolæ, vel parabolæ diametris parallelæ.

Si, pro duobus punctis, detur positione recta quæ in dato ejus puncto contingat, (quam per aliud quodvis ex datis punctis non transire oportet,) Concipe puncta Q, P vel Q, S in dato illo puncto coire, & à datâ illâ rectâ conjungi; Et si duæ dentur ejusmodi rectæ, concipe punctum R & residuum ex punctis P, S coincidere, & à secundâ rectâ conjungi: Et non erit constructio vel demonstratio diversa. 13. *pro omnibus casibus.*

Si vero simul cum duabus contingentibus detur punctum infinite distans, invento novo (finite distante) puncto, ut in simili casu prop. præced. Sectio hâc methodo describi potest; Si vero contingentes parallelæ sint, inventis (quemadmodum ibi ostendimus) asymptotis, describetur per prop. sequentem.

Coroll. 1. Hinc & ex prop. 35. p. 1. cum *coroll.* 5. liquet, Eorundem quinque punctorum, utcunque vices

permu-

permutantium, ope, eandem semper sectionem [vel sect. opp.] describi.

Coroll. 2. Et si pauciora dentur sectionis puncta, ita tamen ut simul cum aliis datis indè determinari possint tot alia ejus puncta, ut sint in universum quinque, (diametrorum parabolæ sive asymptoti hyperbolæ directione pro uno puncto æstimatâ, rectâ vero quæ in dato ejusdem puncto contingat pro duobus,) Sectio hâc methodo describi potest.

Exempli gratiâ.

Si dentur centrum, & tria tantùm puncta sectionis, vel duo cum contingente in eorum altero, dantur totidem ex alterâ parte centri per prop. 22. & *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Similiter datis tribus punctis, vel duobus & contingente in eorum altero, datâque positione rectâ pro diametro cum angulo quem ad eandem faciant ordinatæ, dantur totidem ad alteras partes diametri per prop. 20. p. 1. Et si in hoc casu dentur tria tantum puncta, quorum unum in ipsam diametrum incidit, dabitur contingens in hoc puncto per *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Si detur magnitudine recta pro diametro transversâ, proindeque duo extrema ejus puncta pro verticibus, & unum præterea punctum per quod sectio transeat, cum angulo ordinatarum; dabuntur duæ contingentes in verticibus per *coroll.* 8. prop. 20. p. 1.

Si, pro Ellipsi, detur tranversa diameter unà cum secundâ diametro huic conjugatâ ad eandem in dato angulo inclinatâ, idem est casus cum præcedenti. Pro hyperbolâ vero [vel sect. opp.] datâ transversâ diametro, atque secundâ huic conjugatâ sub dato angulo ad eandem inclinatâ, ductâque pro contingente huic æquali & parallelâ per utrumvis extremum transversæ punctum, quæ ibidem bisecetur, Rectæ conjungentes centrum & extrema contingentis puncta erunt asymptoti, per def. ad prop. 23. p. 1; quarum ope, & alterutrius punctorum extremorum diametri transversæ, commodiùs

diùs describetur sectio per propositionem sequentem.

Si pro Hyperbolâ [vel sect. opp.] aut Ellipsi, detur transversa diameter ejusque parameter, cum angulo ordinatarum, Idem est casus cum præcedenti; nam ex his datis innotescit secunda diameter huic conjugata per prop. 24. p. 1.

Pro Parabolâ, datis tribus tantùm punctis cum diametrorum directione, ductâque secundum hanc directionem rectâ quæ conjungentem duo quævis ex datis punctis bisecet, & per residuum punctum ductâ conjungenti parallelâ, Dabitur aliud punctum ex contrariâ parte diametri.

Si cum directione diametrorum parabolæ dentur duo puncta, & recta pro contingente in eorum altero; Ductâ per contactûs punctum diametro, erit casus similis præcedenti.

Datis verò rectâ pro parabolæ diametro & puncto in eodem pro vertice, cum angulo ordinatarum, & diametri parametro; Ductâ per datum punctum rectâ sub angulo dato pro contingente, ductâque utcunque huic parallelâ diametrum secante pro ordinatâ: Ex abscissa & parametro innotescit (ex prop. 25. p. 1.) longitudo ordinatæ, adeoque duo alia puncta sectionis.

Sin pro parabolâ dentur duo puncta in quibus datæ duæ rectæ (non parallelæ) sectionem contingant; Per contingentium occursum & medium punctum conjungentis data puncta ductâ rectâ, innotescit diametrorum directio per prop. 20, p. 1. ejusque *coroll*. 3.

Redeuntque adeò hi omnes casus in hujus prop. casum generalem; Atque alios similiter casus eò reducere licebit.

Scholium. Hujus methodi sectiones conicas describendi facillima est atque expeditissima praxis. In rectis T X, T Y sumptis T I, T 1 particulis in ratione T X ad T Y, notatisque ex utrâque puncti T parte I, II, III &c. 1, 2, 3 &c. ad designandum T I, T 1 semel, bis, ter &c. sumptas, & per correspondentia puncta (juxta legem priùs positam) ductis Q I, R 1; Q II, R 2; Q III, 14. *Pro omnibus casibus.*

R 3

R3 &c. in σ, Σ, ʃ, &c. concurrentibus, erunt hæc totidem puncta sectionis describendæ.

Cùm ad rectarum T X, T Y puncta magis longinqua deventum fuerit quàm praxi convenit, aut rectarum Q I, R 1 intersectio magis obliqua evaserit quàm ut satis accuratè notari possit, utrique incommodo mederi licet, punctorum primò datorum loco, alia & commodiora ex jam inventis adhibendo.

Innotescet autem, (si opus fuerit,) nondum descriptâ sectione, cujus generis futura sit. Nam si juxta *coroll.* 1. prop. 35. p. 1. ad tria puncta ducantur totidem tangentes, (punctis in hanc rem vices permutantibus,) earùm ope duæ diametri (per prop. 20. p. 1.) inveniri possunt; Quæ si ad easdem partes cujusvis tactus conjungentis concurrant ad quas ipsæ tangentes, Erit sectio Hyperbola [sive sectiones opp.] Quod etiam erit, si duo simul dentur puncta infinite distantia. Si diametri concurrant ad contrarias partes tactus conjungentis ad quas ipsæ tangentes, Erit sectio Ellipsis; quæ etiam (pro punctorum situ) forte circuli circumferentia evadat. Sin parallelæ fuerint diametri, erit sectio Parabola. Et notandum est, quòd, si detur una contingens cum tribus punctis, duas tantum novas contingentes ducere opus fuerit: Sin dentur duæ contingentes cum uno puncto, priusquam tertia ducatur, inveniendum erit (per methodum præcedentem) novum punctum sectionis, ad quod vel tertia illa contingens ducatur, vel quôcum prius punctum vices permutet; Secus deerit punctum quod puncti E in *fig. coroll.* 1. prop. 35. p. 1. (i. e. puncti T in *fig.* hujus prop.) munere fungatur, quod ab aliis omnibus diversum esse necesse est.

Si dentur duæ contingentes parallelæ cum uno puncto, Erit sectio Hyperbola [vel sect. opp.] aut Ellipsis, prout punctum illud extra, intrave, parallelas jacuerit.

Methodus hæc ad casus, ubi dantur rectæ quæ in punctis infinitè distantibus contingant, hoc est, ubi dantur tria puncta cum unâ asymptoto, vel unum cum utrâque, non extenditur, propter duo saltem puncta secundum

cundum eandem directionem infinitè distantia, proindeque coincidere censenda, quæ, nè X, Y (unum vel utrumque) in infinitùm abeant, diversa esse oportet. His verò datis, facillimè conficitur problema per propositionem sequentem.

Prop. V. Probl. V.

Datis Hyperbolæ [*vel sect. opp.*] *utrâque asymptoto* A H, G H, *& extrà easdem uno puncto* B *per quod sectio transeat; vel datâ unâ asymptoto cum tribus punctis* B, D, F, *ità ut nec omnia tria in directùm jaceant, nec conjungens duo aliqua sit datæ asymptoto parallela: Sectionem describere.* 15.

1. Si detur utraque asymptotos cum uno puncto B, Per B ducantur utcunque quotlibet rectæ B A, B C &c. uni asymptotôn in A, C &c. alteri in G, E &c. respectivè occurrentes, fiantque G F, E D &c. ipsis A B, C B &c. respectivè æquales, Erunt puncta F, D &c. ad sectionem.

Nam si asymptotis A H, G H, per punctum B fiat (per prop. 2.) hyperbola [vel sect. opp.] hæc à lineâ sic descriptâ (propter *coroll.* 1. prop. 15. p. 1.) non erit diversa.

2. Sin una tantum detur asymptotos A H, cum tribus punctis B, D, F, Junctæ B D, B F occurrant datæ asymptoto in A, C, factisque D E = C B, F G = A B connectatur E G, occurret hæc necessario rectæ A C alicubi in H; nam si esset ei parallela, ob A B = F G & C B = D E, esset connexa D F parallela A C contra hypothesin: Sumptâ itaque E G pro alterâ asymptoto, casus hic in priorem redibit. 15.

Si ex datis tribus punctis duo coincidant, hoc est, si detur unum punctum cum rectâ quæ in dato puncto contingat quæ non sit datæ asymptoto parallela, Concipe duo puncta coincidere & à datâ rectâ conjungi, & non erit casus diversus.

15. Si ex tribus punctis unum infinitè distet, hoc est, si duo tantùm dentur puncta, ex. gr. B, D, cum alterius asymptoti directione (quæ cum datæ asymptoti directione non sit eadem) Connexâ B D occurrente datæ asymptoto in C, factâque D E = C B, per E secundum datam directionem ducatur E G; Hâc pro alterâ asymptoto assumptâ, constit iterùm problema per casum 1.

Prop. VI. Probl. VI.

16, 17. *Datâ pro Hyperbole [vel sect. opp.] axe determinato vel majore Ellipseos, rectâ* A B, *cum utroque foco* F, G, *ut sit* A F = G B; *Sectionem, vel sect. opp. describere.*

In F G (productâ pro hyperbolâ vel sect. opp.) sumatur utcunque punctum C; centro utrovis foco F vel G, intervallo A C, rursus centro residuo foco G vel F, intervallo C B, describantur arcus circulares sese intersecantes in D; Erit punctum D ad sectionem: Eodemque modo, novorum punctorum C ope, innumera ejusmodi puncta D inveniri possunt.

Junctis F D, G D, Ob D G = A C vel B C, F D = B C vel A C erit pro Hyperb. F D — D G vel D G — F D, pro Ellipsi F D + D G, = A B: Si igitur transversâ diametro A B, & secundâ huic conjugatâ ita sumptâ ut ejus quadratum æquale sit rectangulo A G × G B, & angulo ordinatarum recto, juxta *coroll.* 2. prop. 4. fieri intelligatur sectio [vel sect. opp.] cui G D *ex. gr.* (si opus producta) occurrat in *d*, & connectatur F *d*; erunt (per prop. 1. p. 4.) Foci F, G; & (per prop. 5. p. 4.) in hyperb. vel sect. opp. F *d* — *d* G vel *d* G — F *d* = A B = F D — D G vel D G — F D; in Ellipsi F *d* + *d* G = A B = F D + D G; quod fieri non potest nisi coincidant D, *d*; & sic ubique.

Prop.

Prop. VII. Probl. VII.

Datis Parabolæ axe A F, *vertice* A, & *foco* F; *Sectionem describere.* 18.

In F A, ultra A productâ, sumatur A B = A F, & ducatur B E ad A B perpendicularis; sumptoque in A F, ultra A, puncto C, centro C intervallo F C descriptus arcus secet B E in E, deinde centris E, F, eodem intervallo descripti arcus sese intersecent in D; Erit punctum D ad sectionem; Eodemque modo innumera ejus puncta inveniri possunt.

Est enim quadrilaterum F C E D (per construct.) æquilaterum, adeoque parallelogrammum, unde E D parallela A F, & F D = D E. Si jam diametro B A F, vertice A, parametro = 4 A F, angulo ordinatarum recto, fieri intelligatur (juxta *coroll.* 2. prop. 4.) parabola, atque huic (si opus producta) occurrat E D in *d*, & connectatur F *d*, erit (per prop. 2. p. 4.) F focus, & (per prop. 10. p. 4.) E *d* = F *d*; connexâque E F, erunt ob commune latus E F & communem angulum F E D, triangula isoscelia F D E, F *d* E invicem æqualia, hoc est coincident D, *d*; Et sic ubique.

Prop. VIII. Probl. VIII.

Datis duabus rectis F N, F A *sese in puncto* F *intersecantibus, & in earum altera alio puncto* A; *Hyperbolam* [*vel sectiones oppositas*] *describere, cujus focus alter sit* F, *recta* F N *axis, recta* F A *asymptoto parallela, & punctum* A *ad sectionem; Oportet autem ut angulus* N F A *non sit rectus.* 19.

In rectâ F A, ultra A, sumatur A B = F A, & ex B demittatur in F N perpendicularis B N; In F A, ex utravis parte puncti F, sumpto puncto C, ita tamen ut sit C F major perpendiculari à C in rectam B N di-

missâ, Centro C, intervallo C F, describatur arcus circuli secans B N in E; rursus centris E, F eodem intervallo descripti arcus sese intersecent in D; Erit punctum D ad sectionem; Eodèmque modo quotlibet ejusmodi puncta inveniri possunt.

Ductâ A L parallelâ F N secante N B in L, dividatur N F in K, ut sit F A : A L : : F K : K N, productâque F N fiat

1. F K — K N : K N :: 2 F K : K I,

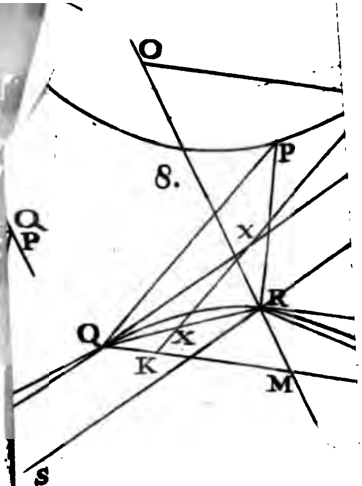
productâque F I fiat I G = K F; Focis F, G, axe transverso I K, (juxta prop. 6.) fiant sectiones oppositæ, quarum uni occurrat F A in *a*, & ducatur *a l* parallela F K secans N B in *l*. Propter proport 1. erit componendo.

2. F K : K N : : $\left\{ \begin{matrix} 2\,FK + KI \\ GF \end{matrix} \right\}$: K I : : (per prop. 9. p. 4.) F *a* : *a l* : : (prius) F A : A L; Coincidunt itaq; puncto A, *a*; Nam si dicatur F *a* ⊏ F A (cùm N L, F A ultra L, A productæ coeant in B) erit L A ⊏ *l a* contrà quàm oportuit, & vice versâ; Unde punctum A erit ad sectionem. Rursus per proport. 2 alternando & dividendo

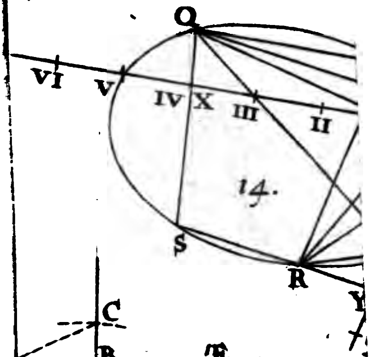
$\left\{ \begin{matrix} GF - FK \\ IF \end{matrix} \right\}$: F K : : $\left\{ \begin{matrix} KI - KN \\ IN \end{matrix} \right\}$: K N,

erit itaq; (propter *Coroll.* 1. prop. 1. p 2.) punctum N illud in quod coeunt tangentes in extremis ordinatæ ad diametrum K F per F ductæ; quæ ordinata (cùm K F axis sit) erit parallela N B, utpote ad K F perpendicularis; Eritq; adeo A F asymptoto parallela; secus enim occurreret sectioni vel sect. opp. in binis punctis, & (propter prop. 3. p. 2.) non esset F A = A B contrà quàm fieri præceptum est. Quòd vero punctum D sit ad sectionem, eodem modo liquet quo (prop. præced.) in parabolâ.

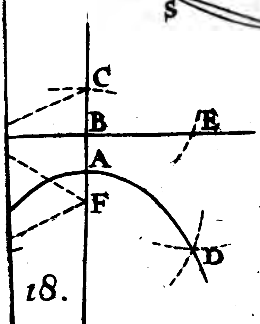
PARS



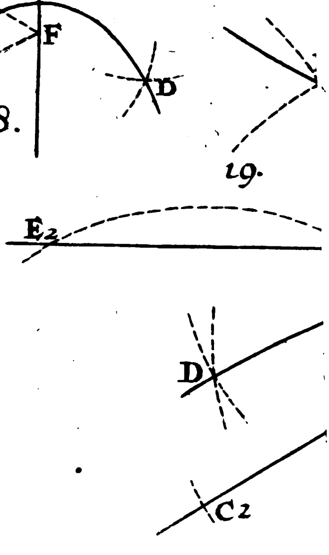
8.



14.



18.



19.

PARS VI.

Lemma.

In Sectionibus oppositis & Ellipsi, sit diameter quævis (quæ in sect. opp. sit determinata) AB, *huic conjugata* KCE, *semidiameter secunda semidiametro* CA *conjugata* CM; *si recta* TK *sectionem vel utramvis sect. opp. in* T *contingens occurrat* CEK *in* K, *& à tactu* T *agatur* TE *ipsi* AB *parallela occurrens* KCE *in* E; *Dico* $CK : CM : CE \div$ *i. e.* $CK \times CE = CMq$. 20. 21.

IN Ellipsi jam patet per coroll. 2. prop. 1. p. 2. generaliter vero sic.

Ductæ AO, BL parallelæ CKE, adeoque sectionem vel utramque sect. in A, B contingentes, occurrant contingenti TK in O, L, & ducatur TF his parallela occurrens AB in F; Erit ob similia triangula

$AO : FT :: DA : DF$, &
$CK : BL :: DC : DB$; sed (per cor. 1. prop. 1. p. 2.)
$DA : DF :: DC : DB$, ergo
$AO : FT :: CK : BL$, unde $AO \times BL =$ (per coroll. 1. prop. 10. p. 2.) $CMq = CK \times FT =$ (ob rectas parallelas) $CK \times CE$.

Prop. I. Theor. I.

In Sectionibus opp. & Ellipsi, si recta quævis DTK *sectionem vel utramvis sect. opp. in* T *contingens duabus quibusvis diametris conjugatis* ECM, ACB, *si opus productis, in* K, D, *occurrat; Dico* $DT \times TK$ 22. 23.

$=\frac{1}{4}$ *fig. diam. per* T; *i. e.* (*si* CG *sit semidiameter secunda ipsi* CT *conjugata*) $=$ CGq.

Sectionem vel sect. opp. in A, B contingant AO, BL contingenti DTK occurrentes in O, L; & à T ipsis AO, ECM, BL, parallela (i. e. ad diametrum AB ordinata) ducatur TF, occurrens AB in F; diameter AB (per coroll. 1. prop. 1. p. 2.) harmonicè secatur in punctis D, A, F, B; unde, propter parall. rectas AO, TF, BL, recta DTK, (per lemm. 8. p. 2.) harmonicè dividitur in D, O, T, L; sed & propter parall. rectas, & AC $=$ CB, erit OK $=$ KL; unde (per lemm. 2. vel 3, p. 2.) TK : TL :: OT : DT; unde TK $\times$ DT $=$ TL $\times$ TO $=$ (per coroll. 2. prop. 10. p. 2.) $\frac{1}{4}$ fig. diam. per T $=$ CGq.

Prop. II. Theor. II.

24. 25. *In Ellipsi summa, in Oppositis sectionibus differentia, quadratorum semidiametri cujusvis* TC *&* *secundæ huic conjugatæ* CG *æqualis est summæ, vel differentiæ, quadratorum semiaxis* AC *& secundi huic conjugati* CM.

Recta in T contingens occurrat axibus (si opus productis) in D, K, & ex T sint ad axes ordinatæ TL, TF; In Ellipsi

$$KDq=\left\{\begin{matrix}KTq\\ KLq+TLq\\ KLq+FCq\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}TDq\\ TFq+DFq\\ LCq+DFq\end{matrix}\right\}+2TK\times TD$$

Rursus

$$KDq=\left\{\begin{matrix}KCq\\ KLq+LCq+2KL\times LC\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}CDq\\ CFq+DFq+2CF\times DF\end{matrix}\right.;$$

unde demptis utrinque æqualibus, & residua dimidiando, TK $\times$ TD $=$ KL $\times$ LC $+$ DF $\times$ FG; Sed per prop. præced. TK $\times$ TD $=$ CGq $=$ KL $\times$ LC $+$ DF $\times$ FC; Est vero CTq $=$ CLq $+\left\{\begin{matrix}TLq\\ CFq\end{matrix}\right\}$ ergo

CGq

$$CGq + CTq = \left\{ \begin{matrix} KL \times LC + LCq \\ CK \times CL \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} DF \times FC + FCq \\ CF \times CD \end{matrix} \right\}$$

$=$ (per coroll. 2. prop. 1. p. 2.) $CMq + CAq$.

In Sectionibus oppositis

$$TKq = \left\{ \begin{matrix} TDq \\ TFq + FDq \\ LCq + FDq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} DKq \\ DCq + CKq \end{matrix} \right\} + 2TD \times DK;$$

Rursus

$$TKq = \left\{ \begin{matrix} TLq \\ FDq + DCq + 2FD \times DC \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} LKq \\ LCq + CKq + 2LC \times CK; \end{matrix} \right.$$

unde $TD \times DK = FD \times DC + LC \times CK$;

& addendo utrinque TDq,

$$\left. \begin{matrix} TD \times DK + TDq \\ TD \times TK \\ CGq \end{matrix} \right\} = FD \times DC + LC \times CK + \left\{ \begin{matrix} TDq \\ LCq + FDq; \end{matrix} \right.$$

Est vero $TCq = \left\{ \begin{matrix} TFq \\ LCq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} FCq \\ FDq + DCq + 2FD \times DC; \end{matrix} \right.$

& deletis utrinque æqualibus, erit quadratorum CGq TCq differentia eadem quæ residuorum $LC \times CK$, & $\left\{ \begin{matrix} DCq + FD \times DC \\ FC \times DC \end{matrix} \right\}$ i. e. (per coroll. 2. prop. 1. p. 2. & lemma præc.) ipsorum CMq, CAq.

Coroll. Hinc in Ellipsi summa, in Sectionibus oppositis differentia, quadratorum semidiametri cujusvis ejusque conjugatæ, est alterius cujusvis diametri ejusque conjugatæ quadratorum summæ vel differentiæ æqualis.

Prop. III. Theor. III.

In Hyperbola sive sect. opp. et Ellipsi, si recta DTK *sectionem vel utramvis sectionum opp. in* T *contingat, & erecta ad contingentem perpendicularis* TV *utrique axi in* V, Y *occurrat; erit* $TV \times TY = \frac{1}{4}$ *fig. diametri per* T. 26. 27.

Contingens occurrat axibus (si opus productis) in K, D; propter angulos rectos DTV, DCK, & angu-

lum CDK communem, erit triang. DTV triang. DCK simile; & ob ang. rectos YTK, DCK, & YKT communem, triangulum YTK simile erit triang. DCK; ergo similia sunt triang. DTV, YTK, unde DT : TV :: YT : TK hoc est $TV \times YT = DT \times TK =$ (per prop. 1.) $\frac{1}{4}$ fig. diam. per T.

28. 29. *Coroll.* 1. Positis quæ in figuris præcedentibus, sit CG semidiameter secunda ipsi TC conjugata, erit $TV \times TY = CGq$; i. e. TV : CG : TY ∺, & ratio TV ad TY duplicata rationis TV ad CG, sive CG ad TY; adeoque cum sit (per coroll. prop. 9. p. 4.) TV ad CG, ut semiparameter axis majoris vel determinati ad semiaxem secundum huic conjugatum, erit ubique TV ad TY, ut eadem semiparameter ad ipsum semiaxem majorem sive determinatum.

Coroll. 2. Si ex puncto Y ducatur YE faciens cum recta TY angulum TYE = TCV, occurrensque diametro per T in E, erit TE = $\frac{1}{2}$ param. diametri TC. Nam ob sim. triang. TCV, TYE, TV : TC :: TE : TY, unde $TV \times TY$ (= $\frac{1}{4}$ fig. diam. per T) = $TC \times TE$, ergo TE = $\frac{1}{4}$ param. diam. per T.

Coroll. 3. Ideoque ex E erecta ad TE perpendiculari EF, quæ occurrat TY in F, erit circulus centro F intervallo FT descriptus sectioni in puncto T æquicurvus. Abscindet enim ex TC (si opus producta) TQ = 2 TE = parametro diametri per T; adeoque (per coroll. 1. prop. 11. p. 3.) erit sectioni in puncto T æquicurvus.

Prop. IV. Theor. IV.

28. 29. *In Hyperbola sive sect. opp. & Ellipsi; Dico solidum ex rectangulo semiaxium in radium circuli sectioni in dato puncto* T *æquicurvi, viz.* $AC \times MC \times TF$, *æquale esse cubo ex semidiametro* CG *diametro per* T *conjugata, i. e.* CG^3.

Manentibus quæ in prop. præced. & ejus corollariis; pro-

producta (si opus) CG occurrat TV in D, erit ob sim. triang. $TD : TC :: TE : TF$, unde $TC \times TE = TD \times TF$; sed (per prop. 11. p. 2.) erit $TD \times CG = AC \times MC$ hoc est $\frac{AC \times MC}{CG} = TD$; unde $TC \times TE = \frac{AC \times MC}{CG} \times TF$; i.e. $\left\{ \frac{TC \times TE \times CG}{CG^3} \right\} = AC \times MC \times TF$.

Coroll. 1. Hinc $\frac{CG^3}{AC \times MC} = TF$; & ob datum quantitatem $AC \times MC$, erit TF ubique ut CG^3.

Coroll. 2. Si parameter axis majoris vel determinati dicatur L, cum sit (per coroll. prop. 6. p. 4.) $TV : CG :: \frac{1}{2}L : CM$, adeoque $TV^3 : CG^3 :: \frac{1}{8}L^3 : CM^3$, erit $\frac{TV^3 \times CM^3}{\frac{1}{8}L^3} = CG^3 =$ ut prius $AC \times MC \times TF$; hoc est $\frac{TV^3 \times CM^2}{\frac{1}{8}L^3} = AC \times TF$, vel (propter $\frac{CM^2}{\frac{1}{2}L} = AC$) $\frac{TV^3}{\frac{1}{4}L^2} = TF$; & ob datam quantitatem $\frac{1}{4}L^2$, erit TF ubique ut TV^3.

Coroll. 3. Similiter, cum sit $TV : TY :: \frac{1}{2}L : AC$ adeoque $TV^3 : TY^3 :: \frac{1}{8}L^3 : AC^3$, erit $TV^3 = \frac{TY^3 \times \frac{1}{8}L^3}{AC^3}$, & $\frac{TV^3}{\frac{1}{4}L^2} = \frac{TY^3 \times \frac{1}{2}L}{AC^3} = TF$; & ob datas quantitates $\frac{1}{2}L$, & AC^3, erit TF ubique ut TY^3.

Prop. V. Theor. V.

In parabola sit AV *axis,* TV *perpendicularis in tan-* 30.
gentem in puncto quovis T, *secans axim in* V, *Radius circuli sectioni in puncto* T *aequicurvi* TF, & *semiparameter axis dicatur*, $\frac{1}{2}L$; *Dico solidum ex qua-*

quadrato semiparametri axis in radium circuli aequicurvi T F *aequale esse cubo ex* T V; *hoc est* $\frac{1}{4}L^2 \times TF = TV^3$.

Circulus sectioni in puncto T aequicurvus (per prop. 11. p. 3.) abscindet à diametro per T rectam TQ aequalem parametro ejusdem diametri, quam perpendicularis ex centro F bisecabit in E; dimissaque in axem ex T perpendiculari TB, erit (per prop. 14. p. 3.) $BV =$ semiparam. axis $= \frac{1}{2}L$; unde (per prop. 15. p. 3.) $TE = BV + 2AB$.

Ob sim. triang.

$$TV : BV :: TF : \begin{cases} TE \\ BV + 2AB, \end{cases} \text{unde}$$

$$TV \times BV + TV \times 2AB = BV \times TF;$$

Sed (per prop. 15. p. 1.) $AB \times L = 2AB \times \frac{1}{2}L =$

$$2AB \times BV = TBq = TVq - BVq, \text{unde} \frac{TVq - BVq}{BV} = 2AB;$$

$$\text{Ergo } TV \times BV + \frac{TV^3 - TV \times BVq}{BV} \text{ id est}$$

$$\frac{TV \times BVq + TV^3 - TV \times BVq}{BV} = BV \times TF; \text{ vel}$$

$$TV^3 = BVq \times TF = \tfrac{1}{4}L^2 \times TF.$$

Coroll. Hinc $\frac{TV^3}{\frac{1}{4}L^2} = TF$, & ob datam quantitatem $\frac{1}{4}L^2$, erit TF ubique ut TV^3.

Prop. VI. Theor. VI.

31. 32. *In Hyperbola sive sect. opp. & Ellipsi, sectionem in* T *contingat recta* TDK, *& à tactu* T *erigatur perpendicularis in contingentem* TVY, *minori axi in* Y *occurrens, ductâque ad utrumvis focum* F *rectâ* TF, *& à puncto* Y *in* TF (*si opus productam*) *perpendiculari* YS; *Dico* TS *aequalem esse semiaxi majori sive determinato* AC.

Ex

Ex puncto V ubi TY majori axi occurrit ducatur ad TF vel TH perpendicularis VR, estque (per coroll. 1. prop. 3.) TV : TY :: ½ param. axis : CA :: (ob sim. triang.) TR : TS; sed (per prop. 6. p. 4.) TR = ½ param. axis, ergo & TS = CA.

Coroll. 1. Ducta ex T ad axem CM ordinata TNG sectioni denuo, vel sect. opp. in G occurrente, Liquet circulum centro Y radio TY descriptum rectam TK, adeoque sectionem, in T contingere, & ob ang. TMC rectum, & TN = NG, eandem denuo vel sect. opp. in G contingere; & porro à recta TF per T & utrumvis focum F ducta abscindere rectam TL axi AB æqualem, utpote ipsius TS duplam. Idem erit in recta THI occurrente circulo in I.

Coroll. 2. Unde, & ob TF ± TH vel TH — TF = (per prop. 5. p. 4.) 2 CA = AB, erit TH = FL, & TF = HI, & TH × HI = TF × FL = TH × TF = ¼ fig. diam. per T.

Coroll. 3. Cum (per coroll. 1. prop. 5. p. 4.) ductâ ex centro C ad contingentem usque rectâ CO parallelâ FT, fit CO = AC = TS, liquet connexam CS esse parallelam contingenti TK, & proinde diametrum diametro per T conjugatam; vel quod idem est, diametrum diametro per T conjugatam, & perpendicularem ex Y in rectam TF, cum eadem recta TF coire in uno eodemque puncto S.

Coroll. 4. Producta semidiametro TC donec sectioni vel sect. opp. occurrat denuo in P, ob TS = SL, & TC = CP, liquet connexam LP parallelam esse DK, & CS, proindeque sectionem in P contingere.

Prop. VII. Theor. VII.

In Hyperbola sive sect. opp. & Ellipsi, positis quæ in præcedentibus, si à puncto Y ducatur ad utrumvis focum F recta YF; Dico TY esse ubique ad YF, ut axis major vel determinatus AB ad distantiam focorum HF, vel ut AC ad HC, vel CB ad CF. 33. 34.

Nam

Nam ob $TV \times TY = \frac{1}{4}$ fig. diam. per $T =$ per (coroll. 2. prop. 5. p. 4.) $TH \times TF$, erit $TH : TV :: TY : TF$, unde ob æquales angulos HTV, VTF similia erunt triangula THV, TYF, & ang. $THV = TYF$, unde

$TH : HV :: TY : YF$; sed propter ang. $HTV = YTF$, erit $TH : HV :: TF : FV :: \left\{ \begin{matrix} TF \pm TH \\ AB \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} FV \pm HV \\ HF \end{matrix} \right\} :: CB : CF$ :: (prius) $TY : YF$.

Pari modo ob similia triangula TFV, TYH institui potest demonstratio in recta YH.

Prop. VIII. Theor. VIII.

33. 34. *In Hyperbolâ sive sect. opp. & Ellipsi, positis quæ in præcedentibus, si producantur* YH, YF *donec occurrant circulo radio* TY *descripto in* N, M, *& conjungantur* NA, MB; *Dico* NA, MB *sectionem vel sect. opp. in* A, B *contingere, & angulum* ANH *vel* BMF *æqualem esse angulo* DTH *sive* KTF.

Cum sit (per præced.) $CB : CF :: TY = YM : YF$, erit MB parallela CY, proindeque sectionem vel unam è sectionibus continget in B; & pari ratione NA sectionem vel alteram è sectionibus continget in A.

Ob sim. rectang. triang. CHY, CFY, BFM, AHN, & $YF = YH$, $YN = YM$, erit $NA = MB$.

Rectæ YH, YF, si opus productæ occurrant circulo in O, L; propter $CB : CF$ vel $CH :: TY = YO : YF$, vel YH, erit connexa OB parallela CY, sectionemque in B continget; parique ratione erit LA parallela CY, & continget in A.

Una itaque eademque recta erunt MB, BO, & similiter NA, MA.

Pari etiam ratione qua NA, MB, erunt BO, AL æquales, unde erit connexa $LO =$ axi AB.

Recta TH vel TF, si opus producta occurrat circulo

lo in P, erit (per coroll. 1. prop. 6.) T P = A B = L O, adeoque arcus T P = L O; unde angulus D T P i.e. D T H sive K T F = L N O, vel L M O i.e. A N H vel F M B.

Prop. IX. Theor. IX.

Si alterutram è sect. opp. vel Ellipsin ubivis contingat T D *in* T, *tactum vero* T *& utrumvis focum* H *jungat* H T, *angulusque* H I Z *qui idem sit cum angulo* H T D *ità moveatur, ut altero ejus crure* H I *perpetuo per* H *transeunte, punctum* I, *à puncto* T *ad utramvis partem progrediendo, circuli radio* T Y (*juxta praecedentia*) *descripti circumferentiam percurrat; Dico crus alterum* I Z *in quovis ejus situ sectionem vel unam è sect. opp. contingere.* 35. 36.

Connexa Y H, & si opus producta, occurrat circulo in N, O, & connectantur N A, B O, quae (per prop. 8.) sectionem vel sect. opp. in A & B contingent, eruntque parallelae.

Quoniam angulus H I Z (ex hyp.) = H T D = (per prop. 8.) H N A, dimissâ ex H in I Z perpendiculari H Z, erit ob ang. N A H rectum, triangulum H I Z triangulo H N A aequiangulum, & ang. I H Z = ang. N H A; unde N H : H A :: I H : H Z; connexis A Z, Z B, & N I, I O, erit ob I H Z = N H A (addito demptove communi ang. A H I vel &c.) ang. N H I = A H Z; unde, & ob N H : H I :: H A : H Z, erunt triang. N H I, A H Z similia, & ang. N I H = A Z H.

Rursus ob ang. N H I = A H Z, vel horum complementa I H O = Z H B, & ob N H : H A :: H O : H B :: H I : H Z, similia erunt triang. I H O, Z H B, & ang. H I O = H Z B.

Jam ob N I H = A Z H, & H I O = H Z B, erit ipsorum N I H, H I O summa vel differentia, ipsorum A Z H, A Z B summae vel differentiae aequalis; sed ipsorum N I H, H I O summa vel differentia i. e. ang. N I O

(cum NO sit diameter) = Recto, ergo & ipsorum AZH, HZB summa vel differentia i.e. AZB = Recto; unde punctum Z est ad semicirculum diametro AB descriptum. Et cum ang. HZI (ex constructione) rectus sit, recta IZ (per prop. 1. p. 4.) non diversa erit à contingente per Z transeunte, & propterea sectionem vel unam è sect. opp. alicubi in X continget.

Coroll. Si recta HI ex primo situ HT circa H rotante, & circulum in I secante, ex puncto I prodeat, ad easdem semper partes rectæ IH ad quas TD sub initio, contingens recta IZ, erit semper ang. HIZ = HTD. Nam recta ex I sub angulo = HTD erit contingens, & ex eodem puncto ad easdem partes non prodeunt duæ contingentes.

Prop. X. Theor. X.

37. *Si Parabolam ubivis in* T *contingat recta utrinque infinita* TK, *tactum vero* T *& focum* H *jungat* HT, *angulusque* HID *qui idem sit cum ang.* HTK *ita moveatur, ut altero ejus crure* HI *perpetuò per* H *transeunte, punctum* I, *à puncto* T *ad utramvis partem progrediendo, rectam* TK *percurrat; Dico crus alterum* ID *in quovis ejus situ sectionem contingere.*

Axis AH productus occurrat contingenti TK in C, & recta AK contingens in axis vertice A occurrat contingenti TI in K, ductâque HK, erit ang. HKI (per coroll. 10. prop. 2. p. 4.) rectus, & KC = TK, ideoque angulus HTK = KCA = HKA, & KHT = KHC = CKA.

Perpendicularis ex foco H in rectam ID occurrat ei in D, connexaque DK & si opus producta occurrat axi in E.

Ob angulos æquales HTK, HID, & HKT, HDI rectos, erunt triangula HTK, HID similia, ideoque ang. IHD = THK, & HI : TH :: HD : HK; Sed ob ang. IHD = THK, erit (addito demptove communi

muni ang. &c.) ang. I H T = D H K; unde (propter præcedentem analogiam) triangula I H T, D H K similia erunt, & ang. H T I = H K D.

Si itaque puncta I, K sint ad easdem partes puncti T, erit $\left\{\begin{matrix} HTI \\ KCA \\ HKA \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} HKD \\ HKE \end{matrix}\right\}$ si ad diversas, erunt æqualium H T I, H K D complementa ad duos rectos æqualia, i. e. $\left\{\begin{matrix} HTK \\ KCA \\ HKA \end{matrix}\right\} = HKE$, hoc est erunt K A, K E una recta, proindeque, propter ang. H D I rectum, recta D I (per prop. 2. p. 4.) non diversa erit à contingente per D transeunte, adeoque sectionem alicubi in L continget.

Coroll. Si recta H I ex primo situ H T circa H rotante, & rectam T C in I secante, ex puncto I prodeat, ad easdem semper rectæ H I partes ad quas T K sub initio, recta I D quæ sectionem contingat, erit semper angulus H I D = H T K.

Patet ut coroll. præcedentis.

FINIS.